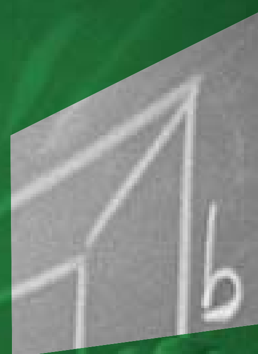
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

februari
2003/nr.5
jaargang 78



REACTIES OP 'RUIMTE EN KEUZES'

OMZIEN IN VERWONDERING



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

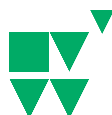
Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

5

februari 2003 JAARGANG 78

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee: Jan Smit en Sam de Zoete.

Rectificatie nummer 78-4
In de inhoudsopgave moet bij pag. 195 als auteursnaam staan: Adri Treffers.
En de kleur van het gehele nummer? Groen!

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Ruimte laten, keuzes bieden?

In dit nummer uiteraard aandacht voor de herinrichtingsvoorstellen in het rapport *'Ruimte laten en keuzes bieden in de tweede fase havo en vwo'*. Onderwijsbonden en organisaties van schoolleiders en besturen lijken heel tevreden - bèta-docenten zijn het voor het merendeel beslist niet.

Vanaf blz. 258 vindt u het commentaar van NVvW-voorzitter Marian Kollenveld op deze voorstellen. Nadere informatie over de plannen is te lezen op blz. 214 van dit nummer. Natuurlijk kunt u ook het rapport zelf raadplegen, te downloaden vanaf de website van de Vereniging (www.nvvw.nl).

Inmiddels zijn de bèta-krachten zich aan het bundelen om vóór 10 maart een duidelijk signaal af te geven aan het ministerie: *'Dit zijn geen goede plannen!'*

U kunt zich uiteraard dagelijks op de hoogte stellen van de actuele stand van zaken en de laatste ontwikkelingen via onder meer www.nvvw.nl; uw actieve inbreng in de discussie is daar eveneens zeer welkom.

Omzien in verwondering

Het hoofdartikel van dit nummer, *'Omzien in verwondering'*, is een waardevol historisch overzicht van de hand van Edu Wijdeveld. Hij beschrijft de onstuimige ontwikkelingen in het Nederlandse wiskunde-onderwijs gedurende de jaren zestig, de tijd van de oprichting van de CMLW (1961, Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) en het IOWO (1971, Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, de voorganger van het huidige Freudenthal instituut). Wijdeveld houdt tevens een pleidooi voor nader sociaal-cultureel historisch onderzoek op dit terrein.
Maar dit nummer bevat meer historie.
Anne van Streun blikt terug op beleid, leerplan en lespraktijk van het wiskundeonderwijs rond 1964. Hoe werd in die tijd het denken bevorderd?
In *'40 jaar geleden'* leest u over de toenmalige opvattingen van de beroemde Russische wiskundige Kolmogorov over het beroep van wiskundige.
De bijdrage *'Het mondeling herleeft'* van Frank van den Heuvel en Klaske Blom laat zien dat een toetsvorm uit vroeger tijden, het mondeling, juist nu weer in het moderne Studiehuis adequaat ingezet kan worden.

Oproep 'Bijvoegsel Nieuw Tijdschrift'

De redactie van Euclides heeft het initiatief genomen tot archivering van oude jaargangen. Dankzij uitgeverij Wolters-Noordhoff heeft de Vereniging inmiddels de beschikking gekregen over alle door WN uitgegeven jaargangen - met uitzondering van de eerste drie, toen Euclides nog als *'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde'* door het leven ging.
U begrijpt dat wij nog op zoek zijn naar die historische jaargangen. Is er wellicht een lezer die deze in zijn of haar bezit heeft en daar afstand van zou willen doen ten behoeve van de Vereniging? U zou ons heel gelukkig maken! Reacties graag naar redactie-euclides@nvvw.nl

VOORSTELLEN HERINRICHTING TWEEDE FASE

Over 'Ruimte laten en keuzes bieden'

[Marja Bos en Gerard Koolstra]

Inleiding

Op 9 januari 2003 stuurde minister Van der Hoeven (OCenW) het rapport 'Ruimte laten en keuzes bieden' ter informatie naar de Tweede Kamer. Het rapport bevat voorstellen voor de herinrichting van de Tweede Fase havo/vwo met ingang van 2005 of (waarschijnlijk) later. Voordat de definitieve voorstellen naar de Kamer gaan, krijgt 'het veld' tot 10 maart a.s. de gelegenheid om erop te reageren. U kunt het volledige rapport downloaden van *www.minocw.nl* of via onze eigen website, *www.nvvw.nl*. Ook andere informatie over en reacties op de voorstellen zijn te vinden op (of via) *www.nvvw.nl*.
Hieronder vindt u allereerst een *beknopte* beschrijving van een deel van de voorstellen, vervolgens een kort commentaar, en uiteindelijk nog enkele toelichtende antwoorden van het ministerie op de eerste vragen vanuit de NVvW.
Verderop in dit nummer, op de groene Verenigings-pagina's, vindt u een bijdrage van NVvW-voorzitter Marian Kollenveld over de voorstellen.

Bijstellingen, algemeen

Allereerst een aantal meer algemene bijstellingen die in het rapport voorgesteld worden:
- Meer *keuzevrijheid*, bewerkstelligd door een kleiner gemeenschappelijk deel en door een beperking tot drie vakken per profieldeel.
- Leerlingen kiezen *twee* vakken in het vrije deel.
- De bovenbouw havo/vwo moet *beter organiseerbaar* worden: minder vakken door opheffing van het systeem van deel- en heelvakken, meer vakken van ongeveer gelijke omvang.
- Op het havo is een *tweede moderne vreemde taal* niet langer verplicht. Op het vwo wordt een tweede moderne vreemde taal verplicht als heeltaal i.p.v. als deeltaal (480 in plaats van 160 slu); de derde deeltaal (160 slu) is niet langer verplicht. Voor sommige groepen leerlingen (dyslectici, allochtonen, bètagerichten) kan de school de tweede moderne vreemde taal vervangen door aardrijkskunde.
- *ANW* wordt binnen het gemeenschappelijk deel alleen gevolgd door M-profielers, *maatschappijleer* alleen door N-profielers.
- Er worden voor het vrije deel van het vwo twee nieuwe keuzevakken ontwikkeld, voortgezette natuurwetenschappen en voortgezette wiskunde.
- In de slaag/zakregeling komt de *compensatieregeling* weer terug.

Ik hoop dat u na lezing, overdenking en bespreking van deze voorstellen met mij van mening zult zijn dat keuzemogelijkheden in evenwicht kunnen zijn met een goede plaats voor de verschillende vakken.

Maria J.A. van der Hoeven
Minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen

Voorstellen voor havo-wiskunde

Het rapport stelt voor, straks slechts twee in plaats van vier wiskundevakken aan te bieden: *wiskunde EM* en *wiskunde NT*, elk met een studielast van 320 uur.
Voor het profiel C&M is wiskunde niet meer verplicht. C&M-leerlingen kunnen, indien gewenst, in het vrije deel wiskunde EM kiezen.
Voor het profiel E&M wordt de studielast wiskunde EM (of wiskunde NT) straks iets groter dan voor wiskunde A12 nu (+14%), terwijl mogelijk enige beperking in het programma gaat plaatsvinden. Anderzijds is het goed mogelijk dat voor het Centraal Examen 'geschrapte' onderwerpen weer terugkomen.
In het profiel N&T verdwijnt het deelvak wiskunde B2 en wordt de verplichte studielast wiskunde NT teruggebracht van 440 naar 320 uur (-27%). Daarmee is het gelijk aan de huidige studielast voor wiskunde B1. Het programma van wiskunde NT zou in hoofd-lijnen dat van het huidige wiskunde B1 kunnen worden, mogelijk met beperkingen, maar ook mogelijk met onderwerpen die nu voor het Centraal Examen zijn geschrapt.
In het profiel N&G kunnen leerlingen in plaats van wiskunde NT ook wiskunde EM kiezen, en omgekeerd: in het profiel E&M kan wiskunde NT gekozen worden. (Dit kan overigens alleen als de school hiervoor kiest; de nadruk in het rapport wordt steeds gelegd op school-eigen keuzes.)

Voorstellen voor vwo-wiskunde

Er komen drie profielvakken wiskunde, elk met een studielast van 480 uur, en er zijn plannen voor een nieuw (keuze)vak 'voortgezette wiskunde' (studielast 440 uur).
Voor de CM-leerlingen wordt wiskunde A1 (360 slu) vervangen door *wiskunde CM* (480 slu; +33%),

gebaseerd op wiskunde A1 maar mogelijk uitgebreid met meer culturele/maatschappelijke en/of ‘verbale’ elementen.
Het wiskundeprogramma voor het profiel E&M krimpt in van 600 (wiskunde A12) naar 480 slu (*wiskunde EM* of *wiskunde NT*, -20%).
Het wiskundeprogramma voor het profiel N&G krimpt in van 600 (wiskunde B1) naar 480 slu (*wiskunde NT of wiskunde EM*, -20%).
In het profiel N&T verdwijnt het deelvak wiskunde B2 en wordt de verplichte studielast wiskunde teruggebracht van 760 (wiskunde B12) naar 480 uur (*wiskunde NT*, -37%).
Ook hier wordt dus éénzelfde wiskundevak voorgesteld voor de beide N-profielen. In het profiel N&G kunnen leerlingen in plaats van wiskunde NT trouwens ook wiskunde EM kiezen, en omgekeerd: in het profiel E&M kan wiskunde NT gekozen worden.
Uit het rapport: ‘*Voor het vak wiskunde in het vwo geldt, dat daarvoor 480 studielasturen beschikbaar worden gesteld. Dat geldt voor alle vier de profielen. Voor de profielen N&T en N&G (en E&M) is dat minder dan in de huidige situatie. In de huidige profielen heeft wiskunde namelijk 760 (NT) en 600 (NG en EM) studielasturen. Dat is zeer veel meer dan alle andere vakken. Alles afwegende zijn daarvoor onvoldoende redenen. Voor veel leerlingen die voor het overige redelijke resultaten hebben (ook in de natuurwetenschappelijke vakken) is wiskunde een obstakel, terwijl het dat niet zou moeten zijn. Vanuit de wereld van de natuurkunde en de scheikunde wordt opgemerkt, dat de zwaarte van wiskunde leerlingen belet om een bètaprofiel (en dus natuurwetenschappelijke vakken) te kiezen. Met 480 studielasturen en een daaraan aangepast examenprogramma krijgt wiskunde de proporties van een (ander) ‘groot’ vak. Daardoor kan zowel de kwaliteit als de haalbaarheid van het wiskundeonderwijs (het vak is verplicht voor álle leerlingen in het vwo!) beter worden gediend.*
Er is echter ook een ander aspect. Terwijl enerzijds wiskunde voor veel leerlingen een onevenredig zwaar vak is, zijn er ook de specifiek voor wiskunde getalenteerde leerlingen. Die vinden volgens velen in het voor alle leerlingen ontworpen vak onvoldoende stimulans. Dat probleem kan niet worden opgelost binnen de bestaande vakken. In de opzet van redelijk geproportioneerde ‘algemene’ wiskundevakken met daarnaast twee keuzevakken in het vrije deel kan het wél worden opgelost. Voor deze leerlingen zal - in samenwerking met de wetenschappelijke wiskundewereld en in goed overleg met leraren wiskunde - een nieuw keuzevak worden ontwikkeld (standaardomvang, 440 studielasturen), met als werktitel ‘voortgezette wiskunde’. Daarnaast zou wellicht het programmatische verschil tussen wiskunde B (NT) en wiskunde A (EM) wat kunnen worden aangescherpt, waardoor het zinvol wordt dat een leerling met het profiel NT wiskunde A als keuzevak in het vrije deel volgt. Het effect van beide maatregelen zou zijn, dat voor het vak wiskunde zowel verbreding als verdieping mogelijk is. Op de hierboven voorgestelde wijze kunnen dilemma’s bij het vak wiskunde worden opgelost op het gebied van breedte en diepgang, van vakmatige wensen en van praktische uitvoerbaarheid.’

Commentaar in het kort

In het rapport zijn keuzes gemaakt en er schijnt ruimte geboden te worden – maar niet voor de bètavakken. De hardste klappen vallen voor wiskunde in het profiel N&T, met name in het vwo maar ook in het havo. Een van de uitgangspunten, de insteek dat de deelvakken worden vervangen door (uitgebreid naar) de volledige vakken, is voor wiskunde B domweg niet nagevolgd – integendeel! De wiskunde in de N-profielen wordt in de voorstellen qua studielast dusdanig ingekrompen, dat een adequate voorbereiding op bètastudies niet meer mogelijk lijkt. En daarmee lijkt ‘Nederland - kennisland’ voor de toekomst verder weg dan ooit.
Wiskunde B12 (760 slu) wordt nu teruggebracht tot een vak *wiskunde-NT* van 480 slu, daarmee geen ruimte meer biedend voor verdiepende elementen rond redeneren en bewijzen waar het WO destijds zo nadrukkelijk om vroeg. Ook de vakken natuur- en scheikunde worden in omvang teruggebracht, zij het wat minder dramatisch.
Het keuzevak *voortgezette wiskunde* lijkt wellicht een interessante aanvullende optie, maar we vrezen dat dat een illusie zal blijken te zijn. Ongetwijfeld zal lang niet elke school dit keuzevak aanbieden - als leerlingen uit veel vakken kunnen kiezen, komen er immers meer groepen en worden de klassen kleiner, dus wordt de onderwijsorganisatie inefficiënter en duurder. Geen aantrekkelijke optie voor kleine scholen met weinig financiële middelen. Uitdagende (maar voor bètagerichte leerlingen wél haalbare) wiskunde die stimuleert tot de keuze van een exacte of technische vervolgstudie, die wiskunde hoort mijns inziens in het reguliere programma thuis. En dat daarnaast hier en daar een optioneel vak ter profilering van de school wordt aangeboden, dat is heel wat anders. Een structureel probleem (gebrek aan verdiepende elementen zoals aandacht voor redeneren en bewijzen; wellicht een ongewenst vroeg afgebroken analyseleerlijn) kan niet gerepareerd worden in keuzevak dat niet standaard wordt aangeboden.
De reguliere toerusting van de potentiële bètastudent bestaat dus straks uit 480 slu wiskunde-NT of wiskunde-EM. Gezien het feit dat het hoger onderwijs nu al vaak aangeeft aan te lopen tegen een gebrek aan wiskundige vaardigheden van instromende studenten, is te verwachten dat de problemen alleen maar groter worden. (N.B. De drie TU’s (Delft, Eindhoven, Enschede) hebben vanwege de afnemende studentenaantallen het afgelopen jaar besloten tot een drempelloze toelating van N&G’ers met slechts 600 slu wiskunde B1 en zonder de verdiepende vakken na/sk/wiB-2. Dat feit heeft de ontwerpers van de voorstellen ongetwijfeld aangemoedigd tot een verdere inperking van de studielast voor de bètavakken.)
Op het havo gaat wiskunde voor de N&T-profielers terug van 440 slu naar 320 slu, een mijns inziens

ontoereikende voorbereiding op veel opleidingen binnen het hbo, temeer daar het de bedoeling is het programma te baseren op het huidige wiskunde B1, waarvan het karakter niet echt uitgesproken exact meer te noemen was.

Ook het huidige profiel N&G krijgt een volledig ander gezicht. Het vak natuurkunde verdwijnt hieruit als verplicht profielvak. Daarmee zal dit 'N-profiel' (?!) z'n bètakarakter verliezen. (Niet duidelijk is immers, hoeveel leerlingen dit vak alsnog in de vrije ruimte zullen kiezen.) Hoe ernstig dat is voor medische vervolg-opleidingen is nog niet geheel duidelijk, maar van een *samenhangend* natuurwetenschappelijk karakter zal in dit profiel geen sprake meer kunnen zijn.
Op blazijde 19 van het rapport staat over het profiel N&G: *'Bovendien wordt het profiel door deze keuze-mogelijkheid* (wis-EM in plaats van wis-NT; MB) *haalbaar en aantrekkelijk voor een grotere groep leerlingen. Dat is van belang in verband met de behoefte aan bèta-opgeleiden.'* Maar praten we nog over een a.s. bèta-opgeleide bij iemand zonder natuurkunde en zonder bèta-wiskunde?

We zijn enigszins verbaasd over de uitbreiding van het vwo-vak wiskunde A1 tot een vak wiskunde CM met een omvang van 480 slu, in vergelijking met de gemaakte keuzes voor het havo (geen wiskunde-verplichting voor C&M'ers). Als het gaat om de voorbereiding op een sociale studie in het WO is inderdaad een relatief stevig wiskundevak nodig, met veel aandacht voor statistiek – dat zou een vak als het huidige wiskunde A12 kunnen zijn (600 slu). Maar als het uitgangspunt 'wiskunde verplicht voor allen' nu blijkbaar losgelaten wordt, moet ook erkend worden dat in het vwo leerlingen aan te wijzen zijn met weinig talent voor wiskunde en desondanks mogelijkheden in het WO (talen, geschiedenis, culturele studies). Voor hen zou een wiskundevak van beperkte omvang met vooral aandacht voor gecijferdheid (à la havo-A1) en verbale en culturele aspecten voldoende kunnen zijn.

Het bovenstaande pretendeert niet een diepgaande of 'volledige' analyse van de voorstellen te zijn, maar slechts een kort commentaar. Een kritische inhoudelijke discussie is inmiddels onder grote aantallen bètadocenten op gang gekomen, niet alleen op de website van de NVvW maar ook op die van de NVON (docenten/TOA's natuur- en scheikunde, biologie en ANW; *www.nvon.nl*).

Toelichting OCenW

Op 15 januari jl. woonde ik [MB] een bijeenkomst over deze voorstellen bij van het ministerie van OCenW ten behoeve van het platform VVVO (overkoepelende vereniging van vakverenigingen in het VO). Vertegenwoordigers van de vakverenigingen konden vragen stellen aan Roelco Offerein en Jannita Robberse van het ministerie van OCenW. Namens het bestuur van de NVvW was Henk Rozenhart aanwezig.
Ter informatie schets ik een aantal aandachtspunten die door Offerein en Robberse naar voren werden gebracht, onder meer als antwoord op vragen vanuit de vakverenigingen (en vanuit de NVvW in het bijzonder):
- Doel van de herinrichting: oplossen van de problemen in de Tweede Fase.
- Zaken als organiseerbaarheid ('dus' standaardisering in het aantal slu's) en ruimte voor keuzes staan daarbij als uitgangspunten voorop.
- Bezwaren die ingebracht worden *zonder* daarbij oplossingen of alternatieven voor de problemen aan te dragen, zullen door het ministerie terzijde worden gelegd.
- Er heeft, ter voorbereiding van de voorstellen, geen systematische raadpleging plaatsgevonden van bèta-organisaties. Wel hebben informele gesprekken plaatsgevonden.
- Voortgezette wiskunde en voortgezette natuur-wetenschappen kunnen *niet* verplicht gesteld worden voor de toegang tot bepaalde studies in het WO. Ze kunnen hooguit de status 'gewenst' krijgen.
- Scholen mogen zelf beslissen of ze de keuzevakken voortgezette wiskunde en/of voortgezette natuur-wetenschappen aanbieden.
- Voor het havo wordt niet gedacht aan de ontwikkeling van een vak als voortgezette wiskunde, maar er wordt wel gedacht aan de mogelijkheid, vwo-wiskundevakken aan te bieden aan sterke bèta-leerlingen in het havo.
- NG zonder natuurkunde en zonder wis-NT, maar mèt wis-EM, scheikunde en biologie, wordt door het ministerie wel degelijk als bètaprofiel gezien. 'Voor geneeskunde en voor studies in Wageningen is wel scheikunde, maar geen natuurkunde nodig.'
- Een vaste norm voor het gewicht van de Praktische Opdrachten wordt losgelaten. Vrijheid voor de scholen staat voorop.
- De inhoudelijke invulling van de gewijzigde programma's staat nog min of meer open. In het rapport worden daarvoor slechts indicaties gegeven. De procedure voor die invulling ligt nog niet vast; 'het veld' kan meedenken.
- Vanwege de voorgestelde zware ingrepen in een aantal wiskundeprogramma's zal nog vóór 10 maart een apart gesprek plaatsvinden tussen vertegen-woordigers van het ministerie en bestuursleden van de NVvW.

De minister luistert

Minister Van der Hoeven heeft aangegeven dat ze 'goed wil luisteren naar wat de mensen uit de praktijk van deze voorstellen vinden'. Oordeelt u zelf.
Tot *10 maart* a.s. is er nog tijd om de voorstellen kritisch te bestuderen, voor een goede inhoudelijke discussie (bijvoorbeeld via de website), en voor eventuele reacties, bezwaren en alternatieve oplossingen. Deze kunt u vóór 10 maart sturen naar de Minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, mevrouw M.J.A. van der Hoeven, Postbus 25000, 2700 LZ Zoetermeer. Intern kunt u uw reactie kwijt op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*).

HET BEROEP VAN WISKUNDIGE

Van Prof. Freudenthal ontving de redactie een overdruk van een artikel van A. N. Kolmogorov, hoogleraar aan de universiteit van Moskou, getiteld La profession de mathématicien.[1]) Gaarne volgen we zijn suggestie de inhoud van dit artikel, althans in verkorte vorm, aan de lezers van Euclides kenbaar te maken. Het artikel geeft een indruk van het wiskundig leven in Rusland. We laten hier een vertaling van delen van het artikel volgen.

1. De functie van de wiskundige methoden in wetenschappen zoals de mechanica, de fysica en de astronomie is welbekend. Hetgeen eveneens welbekend is, is dat de wiskunde onmisbaar is voor het praktische werk van de ingenieur en de technicus. Eenvoudig meetkundig inzicht en het vermogen formules te hanteren moet elke opzichter en geschoolde arbeider bezitten. Maar velen hebben een minder duidelijke voorstelling ervan, wat nu eigenlijk het typische is van datgene, waarmee de wiskundige zich uit hoofde van zijn beroep bezighoudt.

Velen denken, dat in de wiskundige handleidingen en boeken reeds voldoende regels en formules voorkomen om alle wiskundige problemen op te lossen, die zich in de techniek kunnen voordoen. Zelfs ontwikkelde mensen vragen soms: Maar kan men dan nog iets nieuws tot stand brengen in de wiskunde? Hierdoor komt het, dat men zich een mathematicus soms voorstelt als een vervelende man, die een groot aantal formules en stellingen kent en wiens taak het is anderen afgezaagde kennis over te brengen.

[...]

Men heeft in het bijzonder behoefte aan wiskundigen, die in staat zijn leiding te geven bij het uitvoeren van omvangrijk rekenwerk. Er zijn tegenwoordig veel problemen, die voor het verkrijgen van een numeriek resultaat rekenwerk vereisen, dat de menselijke mogelijkheden te boven gaat. Het berekenen van elastische spanningen in een stuwdam, van de mate van doorsijpelen van water door een stuwdam, van de luchtweerstand van vliegtuigen en van de baan van een projectiel zijn typische voorbeelden van dergelijke problemen.

[...]

Het is in dit verband interessant er aan te herinneren, dat in de jaren, die op de grote socialistische oktoberrevolutie volgden, de jeugd vrijwel uitsluitend naar de grote technische scholen wilde gaan. Veel jonge lieden verbeeldden zich toen, dat ze alleen langs deze weg onmiddellijk deel konden nemen aan de verwerkelijking van het socialisme.

Gedeelten van een artikel in *Euclides*, jaargang 38 (1962-1963)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

OMZIEN IN VERWONDERING

Voordracht gehouden tijdens het symposium 'De roerige jaren zestig' van de Historische Kring Reken-Wiskunde Onderwijs (HKRWO) op 25 mei 2002

[Edu Wijdeveld]

Kort overzicht

Zoals bekend is over het fenomeen van de New Math beweging nationaal en internationaal al heel wat geschreven. In het bijzonder wat de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde betreft, de CMLW, verwijs ik u bijvoorbeeld graag naar die mooie uitgave van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren *'Honderd jaar wiskundeonderwijs'*[1], waar op verschillende plaatsen over de feiten en gevolgen van het nieuwe leerplan 1968 is geschreven. Ook in de dissertatie van Ed de Moor, *'Van vormleer naar realistisch meetkundeonderwijs'*[2], kunt u uitvoerig terecht voor de ontstaanswijze en opvatting van CMLW en IOWO en wat daaraan voorafging. En omdat ik me in mijn bijdrage liever wil richten op het verhaal achter het ontstaan van beide instellingen, geef ik u als reminder een kort overzicht van het feitenmateriaal.

1958
Invoering nieuw leerplan vhmo gymnasium en hbs (met o.m. analytische meetkunde en beginselen infinitesimaalrekening; vooralsnog geen statistiek)

1959
Congres Royaumont ('A bas Euclide')

1961
Instelling CMLW
Activiteiten ten aanzien van:

I *vwo/havo/mavo*

vanaf 1963
Heroriënteringscursussen 1e-graads leraren vhmo (Kweekschool; HBO): verzamelingenleer, logica, groepentheorie, lineaire algebra en meetkunde, enz.

vanaf 1964
Rapport aan de staatssecretaris inzake een in te richten permanent Studiecentrum

vanaf 1965/1966
Schoolexperimenten Algebra en Analyse, Meetkunde met Vectoren (bovenbouw), Algebra en Meetkunde (onderbouw)

1966
Verzoek van de minister tot opstellen concept-leerplannen t.b.v. gehele Mammoetwet (brugklas, mavo, havo en vwo)

vanaf 1966
Heroriënteringscursussen leraren mavo/lbo

1967
Interimrapport annex discussienota's met leerplanvoorstellen ? Voorstel 'Leerplan wiskunde Rijksscholen' (ingevoerd per 1-8-'68)

vanaf 1968
Toelichtingsnota's CMLW t.b.v. brugklas, mavo/havo/vwo; Invoering nieuwe methodes 'buiten controle' van de CMLW (bijv. Moderne wiskunde; Van A tot Z)

vanaf 1968
Meer methodisch/didactisch-gerichte

heroriënteringscursussen 1e-graads leraren; idem: 3e graads leraren via zgn. 'Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde' (CCBMW)
1968
Rapport over wenselijkheid/mogelijkheid van invoering Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, resp. Computer(wis)kunde in mavo/havo/vwo, gevolgd
vanaf 1969/1970
door schoolexperimenten

II *hoger beroepsonderwijs*
1969
Instelling subcommissie Wiskunde in Hoger Beroeps Onderwijs (WIHBO), met subcommissies voor o.a. hto, heao, enz.

III *basisonderwijs/PA*
1967
Rapport werkgroep Basisonderwijs ? CMLW ? minister
1968
'10-jarenplan' BO/PA (open, democratische, integrale leerplanontwikkeling); installatie regionale werkgroepen PA (leraren wiskunde en pedagogiek)
1969
Eerste PA-conferentie inzake vernieuwingsmogelijkheden BO; Project 'Wiskobas'
1970
'Wiskobasta'? ? moties CMLW ? audiëntie staatssecretaris Grosheide
1971
Instelling IOWO

Vraagstellingen

De kern van mijn verhaal, 'Omzien in verwondering', laat zich in feite samenvatten in twee vraagstellingen:
a. *Hoe is het mogelijk geweest dat de New Math beweging vrijwel mondiaal het wiskundeonderwijs in z'n greep kreeg, om nadien, zoals prof. Freudenthal dat in 1985 uitdrukte, weer een 'smadelijke nederlaag te lijden'?*[3]
b. *Hoe is het mogelijk geweest, dat uitgerekend Nederland, zelfs internationaal bezien, vanuit het basisonderwijs het tij wist te keren, tot wat nu in termen van Adri Treffers 'realistisch reken-wiskunde-onderwijs' heet?*
En daarbij veronderstel ik stilzwijgend dat u uit eigen ervaring wel een impressie heeft van wat die term inhoudt: een reken-wiskundeonderwijs dat in uitgangspunt aansluiting zoekt bij de concrete of gedachte realiteit van de leerling.

En op voorhand – en daarmee schaar ik me graag achter de oproep die de HKRWO in dezen heeft gedaan – zou ik een krachtig pleidooi willen houden voor nader sociaal-cultureel historisch onderzoek naar beide fenomenen.

Van Dantzig

In april 1968 publiceert de CMLW de *Toelichting op het Leerplan Wiskunde*[4], in vervolg op de voorstellen die de Commissie eind 1967 aan de minister had aangeboden ten behoeve van het zogenaamde nieuwe leerplan wiskunde voor de Rijksscholen 1968.

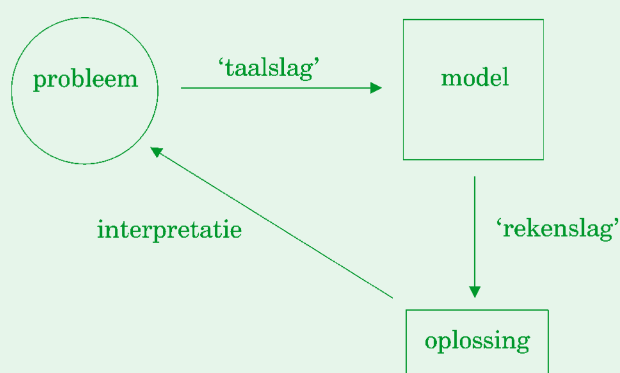
In de Inleiding op die Toelichting, die in eerste instantie bedoeld is voor de brugklas, wordt naar een bijdrage verwezen van prof. D. van Dantzig in het rapport *'The function of Mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics*', dat de Nederlandse subcommissie van de Internationale Commissie voor Wiskunde-onderwijs in 1954 uitbracht.[5]
In die bijdrage wijst Van Dantzig - en ik citeer de Toelichtingsnota - (...) *op de sterke groei van het gebied waar wiskunde wordt toegepast en de daarmee gepaard gaande grote vraag naar wiskundigen en naar mensen die in staat zijn bepaalde soorten wiskunde toe te passen in vakken* buiten de wiskunde. *Als belemmering bij het voldoen aan deze vraag, noemde hij het niet aangepast zijn van het leerplan aan de ontwikkeling van de wiskunde in de laatste decennia.*
Maar meer dan de rechtvaardiging die de CMLW in die passage zag voor de maatschappelijke relevantie van haar leerplanvoorstellen, doelde Van Dantzig in dat artikel vooral ook op een geheel andere benadering van toegepast wiskundeonderwijs dan de Commissie op dat moment voor ogen stond.

Van Dantzig, overleden in 1959, was tot 1940 hoogleraar in Delft. Zijn studiegebied was onder meer de topologie, maar bijvoorbeeld ook de thermo-dynamica en de elektrotechniek. Voorts was hij sterk beïnvloed door de taal-filosofisch gerichte significhe school van Mannoury uit de twintiger jaren. Na 1945 werd hij hoogleraar in Amsterdam in de zogenaamde 'leer der collectieve verschijnselen' (lees: de mathematische statistiek).
Reeds eerder had hij zich gemengd in de vraag naar de maatschappelijke waarde van wiskundeonderwijs in een gelijknamig artikel in 1927 in Euclides (jaargang 3). Maar in de toen gaande discussie over de mate van gestrengheid van de opbouw van het wiskunde-onderwijs, waarin onder meer de namen van Dijksterhuis ter ene zijde en die van mevr. Ehrenfest-Afanassjewa ter andere zijde vigeerden, bleef dat artikel vrijwel onopgemerkt.

Welke waren nu die 'ontwikkelingen in de wiskunde van de laatste decennia*'*, waar Van Dantzig in 1954 over spreekt? Laten we ze categoraal in twee hoofdstromen benoemen:
- enerzijds het *fundamentele grondslagenonderzoek*, dat al vanaf het midden van de 19e eeuw zulke krachtige impulsen had ondergaan, onder meer culminerend in de oprichting van de Bourbaki-groepering in de dertiger jaren, die het gehele wiskundebouwwerk opnieuw wilde funderen tot één organisch structureel geheel op basis van een uniforme taal (verzamelingen, relaties, functies) en logica,
- anderzijds de zich, alweer sinds de industriële revolutie van de 19e eeuw, razendsnel uitbreidende wereld van de *toegepaste wiskunde*, niet alleen in



Prof. dr. D. van Dantzig (1900-1959)



FIGUUR 1 Het mathematiseringsproces als didactisch denkmodel

natuurwetenschappen, techniek, economie, e.d., maar met name na de tweede wereldoorlog ook in een uiteenlopend scala van wetenschappen (medisch, biologisch, sociaal-pedagogisch, ...) alsmede in vele sectoren van bedrijfsleven en industrie.
En in die vlak na de tweede wereldoorlog heersende overtuiging van de essentiële bijdrage die de wetenschap aan het cultureel-maatschappelijk herstel- en vernieuwingsbeleid zou leveren, introduceerde Van Dantzig een nieuwe vorm van wiskundebeoefening: het *wiskundig modelleren* als concretisering van het mathematiseringsproces.

In zijn dissertatie '*Jaren van berekening*'[7], waaraan ik veel heb ontleend, spreekt Gerard Alberts in dit verband over de doorbraak van *'toegepaste wiskunde'* naar *'toepassingsgerichte wiskunde'*.
Enigszins karikaturaal gezegd kan men bij toegepaste wiskunde denken aan binnen de wiskunde ontwikkelde producten en technieken -bijvoorbeeld uit de analyse- die in andere disciplines als zodanig gebruikt worden door vertegenwoordigers van die disciplines. Bij toepassingsgerichte wiskunde echter treedt de wiskunde (de wiskundige) buiten zijn eigen wereld, en stelt zich in dienst van die andere discipline met zijn generaal toepasbare denkvorm van het mathematiseren en wiskundig modelleren.
En met die laatste benadering van het mathematiseren en wiskundig modelleren realiseerde Van Dantzig *'de sprong van doel op middel'*, de veel geciteerde uitspraak van L.E.J. Brouwer, doelend op het algemeen vermogen van de mens zijn wereld (*het doel*) wiskundig (*het middel*) te bekijken.
Concreet: statistiek en kansberekening waren reeds lang gebruikte technieken in economie, astronomie, levensverzekering, enzovoorts, maar hypothesetoetsing ten behoeve van een industriële of bedrijfskundige probleemstelling, met een aan dat probleem verwante

graad van nauwkeurigheid – nu gemeengoed – werd een nieuw fenomeen, naast bijvoorbeeld numerieke benaderingen met behulp van de (eerste) computers.

Het in 1946 op instigatie van Van Dantzig cum suïs opgerichte Mathematisch Centrum - het huidige CWI - paste deze nieuwe techniek van het mathematisch modelleren toe op een veelheid van probleemstellingen uit industrie en bedrijfsleven. Zo werden bijvoorbeeld op verzoek vàn, en in samenspraak mét Rijkswaterstaat berekeningen gemaakt - onder zekere premissen uiteraard - van de vereiste dijkhoogten voor de Deltawerken.
In het bijzonder ook heeft deze nieuwe vorm van wiskundebeoefening vanaf 1956 geleid tot daarop toegespitste opleidingen voor wiskundig ingenieur in Delft, Eindhoven, Twente, leidend tot research- en organisatiewiskundigen, die in de industrie en het bedrijfsleven emplooi vinden.

Het mathematiseringsproces als didactisch denkmodel

Meer dan de CMLW in haar Toelichtingsnota beoogde, doelde Van Dantzig in dat eerder genoemde artikel uit 1954 ook op de mogelijke consequenties van deze nieuwe vorm van wiskundebeoefening voor maatschappelijk relevant wiskundeonderwijs. Dat het desondanks nog 25 jaar zou duren voor die mogelijkheden ook metterdaad benut werden lag dan ook minder aan de CMLW dan wel aan het project Wiskobas voor de basisschool, dat eind zestiger jaren de weg insloeg naar wat nu realistisch reken-wiskundeonderwijs heet.

Ook daarom ben ik wat langer stil blijven staan bij de figuur van Van Dantzig, omdat mij in die doorbraak naar maatschappelijk relevant wiskunde-*onderwijs* de parallel trof met wat toen, in 1946, een doorbraak bleek te zijn naar maatschappelijk relevante wiskunde-*beoefening*. Immers, ook in die realistische onderwijs-benadering wordt de generaal toepasbare benaderingswijze van het mathematiseren ten grondslag gelegd aan het onderwijsleerproces, in termen van 'wiskundige wereldoriëntatie', 'rijke contexten', 'wiskunde als menselijke activiteit', e.d.
In hoeverre die parallel stand houdt, vooral ook in z'n sociaal-culturele context, zou wat mij betreft een belangrijk onderdeel moeten zijn van het hiervoor gepropageerde historische onderzoek.

Laat ik het voorgaande illustreren aan een vereenvoudigde weergave van wat ik elders 'het mathematiseringsproces als didaktisch denkmodel' heb genoemd[8] (zie ook figuur 1).

In de alledaagse werkelijkheid doet zich een probleem voor, dat door een wiskundige bril bekeken leidt tot een gemathematiseerde structuur (een mathematisch model). Binnen die structuur leiden wiskundige methoden en technieken tot een conclusie, die vervolgens weer wordt terugvertaald naar die alledaagse werkelijkheid.

Men kan dat proces in vier woorden samenvatten met: *'verschralen om te verrijken'*. En we herkennen erin een 'taalslag' (het modelleren), een 'rekenslag' (het gebruik van wiskundige methoden en technieken) en uiteindelijk een 'interpretatieslag'.
Waar ons traditionele wiskundeonderwijs zich voornamelijk afspeelde binnen die wiskundige structuur (zeg: de rekenslag), gaat het nu in eerste instantie om het mathematiseringsproces als geheel. Dit vormt dan tevens de genoemde onderwijskundige 'sprong van doel op middel'. Want zeker in het aanvangsonderwijs zullen we de leerling eerst moeten leren, dat je de werkelijkheid (*het doel*) überhaupt door een mathematische bril (*het middel*) kunt bekijken, voordat je begint te 'rekenen'. Voor velen is dat in het geheel nog niet zo vanzelfsprekend.

En vandaar, dat in de klas eerst in concreto 'busje' wordt gespeeld, met een echte buschauffeur en haltes, waar kinderen in- en uitstappen, waarna deze ervaring geleidelijk wordt omgezet in pijlentaal: In de bus zitten 3 passagiers, 2 stappen in; hoeveel passagiers zitten nu in de bus? Notatie: $3 \xrightarrow{+2} 5$, om uiteindelijk te eindigen in de notatie $3 + 2 = 5$.

Met deze integrale benadering van wiskundeonderwijs – met het vorderen van het niveau natuurlijk meer en meer toewerkend naar reëel wiskundig modelleren en 'rekenen' – krijgt ook een begrip als doelbepaling van het wiskundeonderwijs een meer vanzelfsprekende dimensie, zoals Adri Treffers die heeft beschreven in zijn proefschrift 'Wiskobas doelgericht'[9] uit 1978 en nadien verder heeft uitgewerkt tot een complete leertheorie van wiskundeonderwijs voor de basisschool.

Samengevat ligt het essentiële verschil tussen de klassieke opvatting van 'toegepast' wiskundeonderwijs en het moderne 'toepassingsgerichte' ofwel realistische wiskundeonderwijs dus daarin, dat waar de eerste het *achteràf*-perspectief biedt van nuttigheid voor maatschappij en studie, de laatste dit reeds *op voorhand* incorporeert in het wiskundeonderwijs zèlf, via het proces van mathematisering van door de leerling als realistisch beleefde (en doorleefde) situaties.

Terug naar de CMLW

Zou Van Dantzig, ware hij lid geweest van de CMLW, de leerplanvoorstellen in de door hem beoogde richting hebben kunnen doen ombuigen? Ik waag het te betwijfelen. Niet alleen omdat in de samenstelling van de CMLW wel degelijk een aantal representanten uit de school Van Dantzig vertegenwoordigd was, maar vooral ook omdat de vloedgolf van de New Math (die na Royaumont ook West-Europa overspoelde) ook in Nederland welhaast onontkoombaar leek. En daarbij ging het primair om de vermeende kloof tussen het wiskundeonderwijs op de middelbare school en ontwikkelingen in de wiskundewetenschap, met name ook in Bourbakistische zin: uniciteit, taal en logica.

MATHEMATISCH INSTITUUT
DER RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT

UTRECHT, 25 augustus 1961
Achter de Dom 7 - tel. 25351
Boothstraat 17 - tel. 19960

Beste Monna,

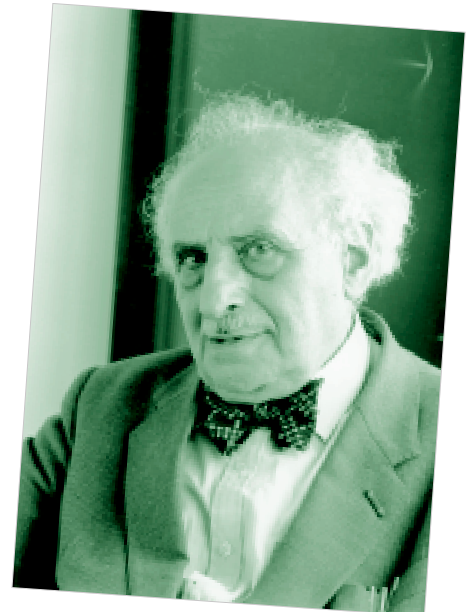
Na mijn terugkeer uit Amerika heb ik kennis genomen van enige stukken betr. de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Mogelijk zijn ze niet volledig, want ik vind nergens een nadere omschrijving, welk leerplan bedoeld is. In de discussies tijdens de vergadering op 19 Juli wordt stilzwijgend verondersteld, dat het om Gymnasium en HBS B gaat. HBS A, MMS, Mulo of andere typen, die uit de mammoet-wet kunnen voortvloeien, staan blijkbaar niet op het programma. Gezien de samenstelling van de commissie zou dit ten dele begrijpelijk kunnen zijn. Ik zou het echter betreuren als de problemen van die scholen minder urgent zouden worden geacht.

Verder zou ik gaarne mijn standpunt willen bepalen t.a.v. de discussie zoals die in de notulen van de vergadering van 19 juli is gerefereerd.

Ik heb diverse malen, naar bekend zal zijn, betoogd, dat ik de modernisering van het leerplan, zoals deze op het ogenblik door velen wordt gepropageerd, geen urgent probleem acht, en wel niet omdat ik aan moderne wiskunde een hekel zou hebben, maar omdat in de diverse voorstellen de introductie van moderne leerstof als principieel doel wordt gezien. Daartegenover zie ik als eerste en enige urgentie een verbetering van het wiskunde-onderwijs.

Nu is het juist, dat de minister onze taak heeft vastgesteld als "modernisering van het leerplan". In zijn installatierede heeft hij echter ook andere doelen aangewezen en de verstrekte opdracht zeer ruim genoemd. Ik meen hieruit het recht te mogen afleiden, dat wij als doel zien de verbetering van het wiskunde-onderwijs - een doel waaraan wij de modernisering op elk punt ondergeschikt maken. Dit is althans mijn visie. Ik acht het van weinig belang of de leerling verzamelingtheoretische en logische symbolen of vectoren en lineaire afbeeldingen op school leert kennen, indien hiermee op dezelfde wijze wordt omgesprongen als met de letters van de algebra. Zulk een verrijking van de stof zou waardeloos en zelfs een nog grotere belasting zijn. Daarentegen zal iemand, die behoorlijk wiskunde-onderwijs op school heeft genoten, met weinig moeite zulke leerstof assimileren, wanneer die hem op een niet te hoog niveau na het eindexamen wordt aangeboden.

Het gevaar van verslechtering door modernisering is niet denkbeeldig. Het dreigt vooral, wanneer de nieuwe leerstof met even veel of groter gemak kan worden gedenatureerd als de oude en wanneer de leraren niet geacht kunnen worden, de nieuwe leerstof voldoende te beheersen. Als een voorbeeld uit het verleden moge ik het functiebegrip aanhalen. Doordat de leraren indertijd niet



FIGUUR 2 Eerste blad van een brief van Freudenthal aan Monna

Prof. dr. H. Freudenthal (1905-1990)

Zeker, op het congres werd ook de maatschappelijke functie van de wiskunde benadrukt, maar – als daar later in de leerplannen al iets van zou blijken – vooral dus opgevat in die klassieke zin van toegepaste wiskunde.

Zo ook de CMLW.
In haar eerste vergadering richtte zij zich met name op de bovenbouw vhmo met een indeling in β-I en β-II, waarvoor schoolexperimenten zouden worden ingericht. Daarbij werd de ruimtelijke stereometrie vervangen door lineaire algebra, zeg vectormeetkunde, de analytische meetkunde door algebra en analyse. En slechts in die zin was sprake van enige continuïteit met het leerplan ‘58, dat infinitesimaalrekening -overigens in beperkter zin- ook toen al was ingevoerd. Schoolexperimenten waarschijnlijkheidsrekening en statistiek c.q. computerkunde werden pas in een later stadium (vanaf 1969) doorgevoerd.

De overige werkzaamheden van de CMLW in die eerste zestiger jaren heb ik u genoemd: al vanaf 1963 werden heroriënteringscursussen voor eerstegraads leraren ingericht. En tot verrassing van de CMLW, die aanvankelijk op 150 à 200 deelnemers rekende, werd daar massaal aan deelgenomen door 500 tot 700 leraren, ofwel ca. 70% van het toenmalig eerstegraads lerarenbestand. Een belangrijk gegeven, omdat daarmee tegelijk het kader gevormd werd voor de heroriëntering en begeleiding van wiskundeleraren mulo en lbo, die vanaf 1966 onder auspiciën van de CMLW een nog veel massaler karakter zou krijgen, met op het hoogtepunt zelfs een deelnemersaantal van 2400 leraren, verdeeld over 40 cursusplaatsen in den lande.

Freudenthal

Prof. Freudenthal, die in het buitenland verbleef, reageerde op de notulen van die eerste vergadering van de CMLW met een brief (zie figuur 2), waaruit ik

het volgende citeer:
(...) *Een discussie die hoofdzakelijk draait om een splitsing in ?-I en ?-II legt mijns inziens de accenten minder juist. Het voornaamste resultaat hiervan kan zijn een prachtig programma van de speciaal wiskundige richting, waaraan er naar mijn overtuiging weinig behoefte is. Ik zie geen noodzaak om wiskundige stof af te wentelen van universiteit en hogeschool naar het VHMO.*
En vervolgens:
(...) *Ik heb diverse malen, naar bekend zal zijn, betoogd dat ik de modernisering van het leerplan zoals deze op het ogenblik door velen wordt gepropageerd, geen urgent probleem acht en wel niet omdat ik aan moderne wiskunde een hekel zou hebben, maar omdat in diverse voorstellen de introductie van moderne - leerstof als principieel doel wordt gezien. Dientegenover zie ik als eerste en enige urgentie een verbetering van het wiskundeonderwijs.*
En tenslotte:
(...) *Uit het voorgaande zal ook duidelijk zijn, dat de modernisering in de onderbouw en wel in de eerste klasse zal moeten beginnen.*
Wat was het effect van deze vroege kritiek van prof. Freudenthal? Niet veel kennelijk, want in 1985 schrijft hij daar over:
(...) *Het enig effect van mijn brief was voorlopig dat er een subcommissie onderbouw als speeltuin voor mij werd ingericht.*
Een wat suggestief commentaar, omdat in die eerste CMLW-vergadering wel degelijk sprake was van onderbouwexperimenten, al werden die voor een wat later tijdstip voorzien.
Maar ondanks zijn kritische stellingname werkte Freudenthal – als altijd – loyaal mee aan de uitwerking van de plannen van de Commissie, met name ook wat betreft de heroriëntering van leraren in moderne onderwerpen. En al waarschuwde hij in voornoemde brief al voor een mogelijke verslechtering van het onderwijs door het nieuwe programma, de indruk die wel gewekt is dat Freudenthal in zijn eentje de gehele New Math een halt toegeroepen zou hebben is op z'n minst onvolledig te noemen.

Om Freudenthals opvattingen overigens nog wat nader te illustreren, is het aardig om de doelstellingsnota te bekijken die hij eigenhandig aan het onderbouw-experiment meetkunde, dat in 1965 van start ging, ten grondslag heeft gelegd.
Voor dit experiment greep de subcommissie van de CMLW terug op een experiment *Bewegingsmeetkunde* uit 1958, omdat, zo zei de commissie, (...) *men unaniem de behoefte gevoelde aan een onderbouw-meetkunde, die naar doel en methode bepaald wordt door het begrip afbeelding* en omdat dit experiment (...) *haar doelstellingen op verheugende wijze benaderde.*
En die doelstelling van de hand van prof. Freudenthal luidt dan als volgt:
a. *een intuïtieve inleiding wordt vereist, waarbij het kind doende moet leren, door tekenen, vouwen, plaveien, modellen maken.*
b. *het kind moet leren een wetenschapsgebied mathematisch te ordenen; d.w.z. niet het geven van een axiomastelsel staat voor, maar een 'monotoon toenemen' van de exactheid met het voortschrijden der cursus.*
c. *niet verzamelingsleer en de logica zelf moeten onderwezen worden, maar de taal die zij spreken in het wiskunde-onderwijs.*
d. *het meetkunde-onderwijs in de onderbouw wordt in relatie gebracht met het onderwijs in de bovenbouw, i.c. de lineaire algebra.*
Anderzijds wordt de Kleinse lijn gevolgd: meetkunde is een onderzoek van het vlak (de ruimte) naar invarianties onder afbeeldingen van het vlak (de ruimte) op zichzelf.
Echter niet het groepsbegrip zij het doel in de onderbouw!

Een beginselverklaring?

Ook daarom is deze doelstellingsnota zo interessant, omdat het een van de weinige momenten is binnen de CMLW waarop een meer uitgewerkte visie op de doelstellingen van het nieuwe wiskundeonderwijs beschreven wordt.
De wens daartoe was overigens in vergaderingen van de CMLW wel regelmatig geuit. Zoals bijvoorbeeld in 1963 door prof. C. Visser, naar aanleiding van een concept-tekst voor het a.s. schoolexperiment 'Algebra en Analyse':
1. *Wat is de motivering van deze stof?*
2. *Waarom wiskunde op school als het met deze stof moet?*
3. *De stof past niet op andere vakken dan op de wiskunde zelf?*
4. *Aan welke normen toetsen wij wat moet worden onderwezen?*
5. *De wiskunde moet niet geïsoleerd worden van andere vakken?*
En in 1964 stelde prof. J. Seidel:
Er dient een principiële uitspraak te komen over de vraag of het wiskunde-onderwijs behalve als discipline om ordelijk te leren denken en inzicht te verkrijgen, nog een eigen maatschappelijke betekenis heeft.

En zo ook op een cruciale vergadering van de CMLW op 1 juli 1966, inmiddels onder leiding van prof. F. van der Blij. Op die vergadering besloot de Commissie niet alleen in te gaan op het verzoek van de minister, nu reeds leerplanvoorstellen in te dienen voor alle sectoren van de naderende Mammoetwet, maar ook om in relatie daarmee de landelijke heroriëntering van mulo- en later lbo-leraren ter hand te nemen. En mede in verband met die laatste categorie werd indringend gevraagd om een '*beginselverklaring*', een doelstellingsnota.

Uiteindelijk kwam er van zo'n beginselverklaring weinig terecht. Dat had natuurlijk in de eerste plaats te maken met de enorme omvang van de werkzaamheden van de Commissie: heroriënteringscursussen voor eerstegraads leraren en nu dus ook – veelvoudig in

omvang – voor mulo- en lbo-leraren. Daarnaast de verzorging en begeleiding van een viertal school-experimenten, alsmede de versnelde voorbereiding van leerplanvoorstellen voor de totaliteit van de Mammoetwet. Geen wonder dat in die genoemde vergadering dan ook verzucht werd: *'tot hoever gaan we?*' Maar, zoals gezegd, de Commissie 'ging', en er zou nog veel meer volgen.

Een tweede reden dat die beginselverklaring niet van de grond kwam was gelegen in het primaire uitgangspunt van de CMLW: de aansluiting van de schoolwiskunde op die van de universitaire studies, met de daarbij behorende vroegtijdige vastlegging van de leerstof voor heroriëntering en schoolexperimenten. De aanvankelijke samenstelling van de Commissie, in belangrijke mate bestaande uit hoogleraren, was daarop ook afgestemd. Men mag veronderstellen, dat deze hoogleraren, met uitzondering van Freudenthal misschien, zich niet als eersten geroepen voelden doelstellingsnota's voor het middelbaar onderwijs op te stellen. Zeker, de Commissie telde naast twee inspecteurs vhmo ook een drietal gerenommeerde leraren-auteurs in haar gelederen (Alders, Streefkerk en Vredenduin), maar ook die bekenden zich graag tot het structurele New Math uitgangspunt. Meer progressieve didactici uit de vijftiger jaren (Van Hiele, Boermeester, e.a.) hadden geen zitting in de Commissie. Bovendien hadden zij het in een later stadium aan de zijlijn veel te druk met de voorbereiding van nieuwe school-methodes voor het komend wiskundeonderwijs.
Nee, die fundamentele 'beginselverklaring' zou pas later binnen het IOWO worden opgesteld.

Nu werd, afgezien van die eerder genoemde verwijzing naar het artikel van Van Dantzig, in de vanaf '67 verschenen leerplanvoorstellen annex toelichtingsnota's slechts opgemerkt, dat het aangeven van een motivering van het programma geen eenvoudige zaak is, want:
(...)*Vele meermalen door traditie bepaalde factoren, spelen hier een rol.*
In elk geval stelt het rapport, dat (...) *de leerlingen bruikbare kennis moet worden overgedragen*, in verband met (...) *de toegenomen maatschappelijke betekenis van de wiskunde*. En daarnaast dient het wiskundeonderwijs (...) *de leerlingen inzicht bij te brengen in de culturele betekenis van dit vak*.
Maar hoe en waarom dit programma tegemoet kwam aan die maatschappelijk en culturele betekenis van de wiskunde, werd verder niet uit de doeken gedaan. De nota's volstonden verder met 'Algemene richtlijnen' bij de diverse programma-onderdelen.

Roep om eigen instituut

Inmiddels was de CMLW in een vrijwel onmogelijke positie komen te verkeren.
Reeds in 1964 had de Commissie geconcludeerd dat de heroriëntering van leraren in verband met de voortgaande ontwikkelingen in de wiskunde een *'permanent verschijnsel'* zou zijn. Er diende derhalve een professioneel bureau te worden ingericht, met wetenschappelijke staf en bibliotheek. En aldus liet men de staatssecretaris weten. Het antwoord liet lang op zich wachten en was afwijzend in verband met een nog nader op te stellen nota over de landelijke organisatie van de leerplanontwikkeling (een nota, waarvoor in 1969 de zogenaamde COLO, Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling, werd ingesteld).
Maar de CMLW liet zich niet afschrikken en herhaalde meerdere malen z'n verzoek tot instelling van een instituut, met vooralsnog hetzelfde resultaat. Wel kreeg de Commissie in 1966 toestemming om in verband met de coördinatie van de heroriëntering van mavo/lbo-leraren een wetenschappelijk medewerker aan te stellen, i.c. de auteur van dit artikel.

En daarmee was het hek van de dam.
Immers, in de daarop volgende jaren tot 1971 werden meerdere medewerkers aangesteld ten behoeve van gaande activiteiten van de CMLW, zoals de experimenten bovenbouw-vhmo, de experimenten Statistiek en Computerkunde, ter ondersteuning van de subcommissie Hoger Beroepsonderwijs (de zogenaamde WIHBO) en ten behoeve van het project Basisonderwijs (Wiskobas), dat naar omvang en opzet het totaal van de werkzaamheden van de CMLW leek te zullen gaan evenaren. En bij het ontbreken van een mogelijke rechtspositie binnen de CMLW waren al deze medewerkers op de meest uiteenlopende wijzen ondergebracht: bij de universiteit, bij de Pedagogische Centra, bij Pedagogische Academies, of vrijgesteld van schoolverband.

De toestand werd onhoudbaar toen het project Wiskobas, dat zich inmiddels een omvangrijk landelijk steunveld van regionale werkgroepen van PA-leraren had weten te verwerven, in 1970 dreigde het bijltje er bij neer te leggen. Het Dagelijks Bestuur van de CMLW – inmiddels onder leiding van prof. Freudenthal – deed nogmaals een dringend beroep op de staatssecretaris, akkoord te gaan met de instelling van een eigen instituut.

IOWO

Uiteindelijk nam staatssecretaris Grosheide in januari 1971 het moedige besluit, onder passering van de COLO, met zo'n instelling akkoord te gaan. En zo kon per 1 augustus 1971 het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) van start gaan, met Freudenthal als hoogleraar-directeur.

Let wel, het ging hier dus om een instituut voor *onderwijs*-ontwikkeling, meer dan alleen om *leerplan*-ontwikkeling. En daarmee werd in de naamgeving van het instituut in feite al die meermalen genoemde 'sprong van doel op middel' vertolkt. Immers in het begrip onderwijs-ontwikkeling ligt fundamenteel de sociaal-pedagogische doelvraag al besloten, met uiteindelijk de leerplanontwikkeling als afgeleide.
En hoewel het Wiskobasteam aanvankelijk wel degelijk enige New Math neiging betoonde, was het toch haar

relatieve onafhankelijkheid -naast een zekere carte blanche situatie- die deze doelvraag geleidelijk kon doen beantwoorden vanuit een realistische didactiek.

Zeker, daar was meer voor nodig dan alleen die open mind binnen een hecht Wiskobasteam. Het vereiste ook, zonder maar iemand te kort te doen, de kwaliteiten van een Adri Treffers, die deze doelvraag in de basis al verwoordde in dat eerste IOWO-jaar en deze geleidelijk verder ontwikkelde tot een complete leertheorie voor wiskundeonderwijs voor de basisschool, van een Fred Goffree, die de onderwijzersopleiding inhoudelijk en leertheoretisch een totaal ander aanzien gaf, en last but not least van een Hans Freudenthal met zijn fundamentele bijdragen en publicaties over de grondslagen van het nieuwe wiskundeonderwijs, die hij ook internationaal uitdroeg.

De rest is bekend. Langzamerhand werd binnen het IOWO (en later OW&OC en FI) naar het voorbeeld van Wiskobas het gehele wiskundebouwwerk van 4-18 jaar omgebogen in de nieuwe richting, te beginnen in 1974 met het lager beroepsonderwijs en mavo, waar de nood na invoering van de Mammoetwet het hoogst was gestegen. De rest sloot zich aan, wat bijvoorbeeld in de 90-er jaren leidde tot het radicaal gewijzigde programma 12-16 van de COW, de Commissie Onderbouw (later: Ontwikkeling) Wiskunde.

Tot slot

In de aanvang van mijn verhaal opperde ik de vraag hoe het mogelijk is geworden, dat uitgerekend in Nederland de New Math beweging, die in de crisistijd van het Wiskobasproject ook even ons basisonderwijs dreigde te overspoelen, werd omgebogen in de aangegeven richting. Is daar mutatis mutandis een parallel te ontdekken met de introductie van die nieuwe vorm van wiskundebeoefening die Van Dantzig vlak na de oorlog introduceerde en waarin ook dat mathematiseringsproces centraal stond?
In 1945 was het natuurlijk de reactie op de sociaal-economische crisis van de dertiger jaren, die na de schok van de tweede wereldoorlog mede het klimaat bepaalde voor een doorbraak naar maatschappelijk dienstbare wetenschapsbeoefening. Met dat drama en die cultuurschok is natuurlijk niets te vergelijken.

Maar dat indachtig: Heeft de sociale crisis van de zestiger jaren dan wellicht toch iets te maken met de doorbraak naar het nieuwe wiskundeonderwijs? Was de maatschappij vernieuwingsgericht? Was er in de onderwijspolitieke context - het naoorlogse streven naar een open, democratisch en geëmancipeerd stelsel van onderwijsvoorzieningen - ook het geloof in de fundamentele bijdrage die wiskundeonderwijs aan de volksverheffing zou kunnen leveren, die staatssecretaris Grosheide deed besluiten akkoord te gaan met de instelling van het IOWO? De waardering van de overheid voor de enorme krachtsinspanning van de CMLW, met name ook ten behoeve van de Mammoetwet, was groot. Een concept-wetsontwerp basisonderwijs was in de maak; verwachtte men daaraan eenzelfde bijdrage vanuit het Wiskobasproject, vooral ook op gezag van Freudenthal?
Of ligt de zaak meer basaal en was het de eerdergenoemde ongebondenheid en onbevangenheid van het Wiskobasteam -in belangrijke mate gerecruteerd uit de wereld van basisonderwijs en PA- dat een geheel andere weg kon inslaan, inhoudelijk en procedureel?

Hoe het ook zij, het IOWO staat aan de basis van een belangrijke innovatie in het wiskundeonderwijs die, ik herhaal het, nader beschreven en onderzocht zou dienen te worden.

Oproep

Degenen die na lezing van het voorgaande geïnteresseerd zijn in en/of willen bijdragen aan een eventueel onderzoek in bovenstaande zin, kunnen contact opnemen met de auteur (e-mail: wijdeveld.baarn@wanadoo.nl) of met Ed de Moor (e-mail: e.w.a.demoor@planet.nl).

Literatuur

[1] Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren: Honderd jaar Wiskunde-onderwijs (2000).
[2] E.W.A. de Moor: Van Vormleer naar Realistische Meetkunde (1999), isbn 90-73346-40-1.
[3] H.F. Freudenthal: Prehistorie - '10 jaar leerplanontwikkeling 1975-1985' (1985); samen met F. Goffree t.g.v. het 10-jarig bestaan SLO.
[4] CMLW: Toelichting op het Leerplan Wiskunde (1968).
[5] D. van Dantzig (1954): The function of mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics (1954); in een rapport van de Nederlandse subcommissie van de Internationale Commissie van het Wiskunde-onderwijs (in Euclides 31, 1955).
[6] H.J. Smid: David van Dantzig en het onderwijs in de wiskunde, in: Uitbeelden in Wiskunde (CWI, 2000).
[7] G. Alberts: Jaren van Berekening (1998), isbn 90-5356-317-2.
[8] E. Wijdeveld: Matematiseren - een didaktisch denkmodel, in: Wiskobas Bulletin, jrg. 9 nr. 6 (IOWO, 1979).
[9] A. Treffers: Wiskobas Doelgericht (IOWO,1978).

Over de auteur

Edu Wijdeveld (e-mailadres: wijdeveld.baarn@wanadoo.nl) werd in 1966 de eerste medewerker van de CMLW. Samen met Fred Goffree nam hij het initiatief voor een basisschoolproject, dat later Wiskobas zou gaan heten. Vanaf 1971 was hij directeur/medewerker van het IOWO en secretaris van de CMLW. Van 1990 tot 1993 was hij voorzitter van de Nederlandse Vereniging voor Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO), waarvan hij tevens erelid is.

Veertig jaar onderwijs-verandering?

Om te beginnen: 1964

[Anne van Streun]

Vernieuwing, verbetering of gewoon verandering?

Naar aanleiding van mijn oratie kreeg ik een e-mail van collega De Boer, een wiskundeleraar met ook zo'n veertig dienstjaren, die bezwaar maakte tegen het woord onderwijs*vernieuwing*. 'Het gaat om onderwijs-*verbetering'*, schreef hij, 'en alles wat voor onderwijs-vernieuwing doorgaat, leidt lang niet altijd tot verbetering van het onderwijs.' Daar zit wat in, vandaar het woord onderwijsverandering in de titel van dit stukje. Is het onderwijs in de veertig jaar die ik zelf kan overzien, iets vernieuwd, verbeterd of veranderd? In kringen van onderwijsonderzoek wordt de wereld van het onderwijs wel vergeleken met een oceaan. Aan de oppervlakte van de oceaan gaat het hevig tekeer, de woeste golven van het onderwijsbeleid en de centraal geplande onderwijsvernieuwing zijn hoog en veroorzaken veel discussie. Op de bodem van de oceaan gaat het gewone leven in het leslokaal ongehinderd door, niet beïnvloed door wat er aan de oppervlakte gebeurt. Jan van den Akker (Universiteit Twente) formuleert het zo:
'Er is veel empirisch bewijsmateriaal voor de stelling dat didactische patronen in concrete lespraktijken in allerlei vakken in verschillende schooltypen en in vele landen opmerkelijk gelijksoortig traditioneel en eenzijdig van aard zijn: dominantie van frontaal lesgeven door de docent met weinig tot geen initiatief bij de leerlingen, alsmede een tamelijk slaafse navolging van het leerboek.'
Klopt dat beeld met de werkelijkheid? Laten we de laatste veertig jaar eens overzien. Ik kies daarbij de volgende drie invalshoeken:
- Het *centrale onderwijsbeleid* met de structuur-veranderingen en gewenste onderwijsvernieuwing, de oppervlakte van de oceaan.
- De inhoud van het onderwijs, het *leerplan*.
- De *lespraktijk*, het leven op de bodem van de oceaan.
Mijn terugblik begint in 1964, toen ik mijn eerste baan als wiskundeleraar kreeg. En dan ga ik in volgende afleveringen zo verder tot de dag van vandaag. Achtereenvolgens passeren de volgende onderwijs-structuren met leerplan en lespraktijk de revue:
- *hbs-mulo*
- *mavo-havo-vwo*
- *basisvorming*
- *tweede fase havo-vwo*

Het onderwijs in 1964

In de volgende tabel staan de schooltypen in 1964 en de verdeling van de leerlingenpopulatie over die schooltypen. Een 20% volgde na de lagere school geen vervolgonderwijs maar werkte al.

hbs/ gymnasium	mulo	nijverheids-onderwijs	arbeidsmarkt
15%	30%	35%	20%

Ongeveer de helft van de leerlingen van hbs/gymnasium koos voor een B-richting (7 à 8%); het nijverheids-onderwijs bestond voornamelijk uit huishoud-onderwijs, technisch onderwijs en landbouwonderwijs.

Het leerplan in 1964

De inhoud van het wiskundeonderwijs in de mulo en hbs/gymnasium was sterk gericht op het beheersen van technische, algebraïsche, vaardigheden. Aan het einde van klas 1 hbs - met drie lesuren algebra per week - konden mijn leerlingen op het proefwerk heel redelijk algebraïsche breuken optellen (zie figuur 1).

In klas 2 kostte daarnaast het herleiden van wortelvormen veel tijd (zie figuur 2). Die herleiding was noodzakelijk, omdat je anders niet met de tabel de waarde kon benaderen. Je zocht dus een herleiding die tot een kwadraat onder het wortelteken leidde.

In klas 3 vormde het leren berekenen van de waarde van ingewikkelde vormen met behulp van de logaritmentafel een hoogtepunt in het rekenwerk (zie figuur 3). (Voor de jongere lezers: computers waren er toen nog niet; dus de relevantie van al dat rekenwerk was evident, net zoals het heel nauwkeurig cijferen in de lagere school.)
Het gaat daarbij niet alleen om het inslijpen van

technieken (*Weten dat)*, maar zeker om een bepaalde systematische probleemaanpak om het zicht op je eigen rekenpartijen niet kwijt te raken. In mijn aantekeningen uit die tijd zie ik een grote nadruk op het eerst opstellen van een plan (*Weten hoe*) voordat er gerekend mocht worden. Dat plan beslaat in dit voorbeeld al snel een hele pagina: de logaritme nemen en alle rekenstappen vooraf bedenken (log teller en log noemer apart berekenen) en in het rekenschema opnemen. Voor een goed plan kreeg de leerling van mij al flink wat punten op de repetitie.

In 4 en 5 hbs-B stonden de technieken ook centraal. In mijn eigen hbs-tijd mochten of konden we nog niet differentiëren, zodat we de maxima, minima en dergelijke van een 'functie' als in figuur 4 op een andere manier moesten berekenen. Kunt u dat (nog)? In 1964 leerde ik het de leerlingen *wel* met de afgeleide en daar zit natuurlijk heel wat technische vaardigheid (*Weten dat*) achter. Op dat moment spraken we ook echt van functies in plaats van vergelijkingen en formules. In Euclides werd heftig gestreden over de vraag of er nog een verticale as moest/mocht worden getekend. De *y*-as was in de ban gedaan; die hoorde niet bij het functiebegrip! Het klassieke functieonderzoek staat pas weer ter discussie sinds de invoering van de grafische rekenmachine. Maar daar zijn we in deze en de volgende aflevering nog lang niet aan toe.

Ook in vakken als de Analytische Meetkunde en de Goniometrie moest veel gerekend worden met lettervariabelen. Hierbij was een systematische probleemaanpak en het maken van een plan geen overbodige luxe. Veel leerlingen rekenden bijvoorbeeld bij het zoeken naar een formule voor een meetkundige plaats maar door, terwijl ze de vergelijking al in handen hadden. De belangrijkste uitzondering op het technische rekenwerk was de meetkundelijn met veel bewijzen en berekenen, waarvoor een probleemaanpak noodzakelijk was, ook in de mulo. In de klassen 1 tot en met 3 ging het over de vlakke meetkunde, in 4 en 5 over stereometrie. Leerlingen die indertijd met succes een B-opleiding en daarna een universitaire studie voltooiden, spreken nog altijd met weemoed over die Euclidische meetkunde. (Onlangs deed de voorzitter van de KNAW, de bioloog Pim Levelt, nog eens een oproep om die Euclidische meetkunde weer in te voeren wegens het aanleren van waardevolle denkmethoden; *Weten hoe* en *Weten waarom*.)

FIGUUR 1, 2, 3, 4

klas 1 hbs	Herleid: $\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}-\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$
klas 2 hbs	Herleid: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$
klas 3 hbs	$x=\frac{\sqrt[4]{83,65}\cdot(0,1256)}{3\cdot\sqrt{265,1}\cdot\sqrt[3]{52,7^2}}$
klas 4/5 hbs-B	$y=\frac{6x^2+6x+12}{x^2-4x-5}$ Bereken de kenmerken en teken de grafiek.

De lespraktijk in 1964

Mijn lessen in 1964 leken qua werkvorm sprekend op die van alle collega's in het land. De leraar vormde de intermediair tussen de leerstof, het boek en de examens aan de ene kant en de leerlingen aan de andere kant. De schoolboeken bevatten als regel voor leerlingen niet te verteren theorie, dus de docent legde met goedgekozen voorbeelden de kern uit, docerend of in een leergesprek. Daarna gingen de leerlingen het laatste kwartier met de huiswerksommen aan de slag. De centrale schriftelijke examens speelden een grote rol en een goede leraar liet veel matige leerlingen toch een voldoende bereiken door een gerichte examentraining gekoppeld aan een kernachtige operationele samenvatting (één A4 per vak), gebaseerd op de examenpraktijk. Het instituut van de universitaire deskundigen of gecommitteerden bij de mondelinge eindexamens van hbs en gymnasium garandeerde een wederzijdse wisselwerking tussen het vhmo en de universiteiten, wat betreft het niveau en de leerstof. Veel van die universitaire vakdeskundigen waren zelf ook leraar geweest.

Wat namen zij ervan mee?

Op de duur vroeg ik mij, als schooldecaan, af of mijn leerlingen op die manier wel goed beslagen ten ijs kwamen in het vervolgonderwijs. Daar hadden ze geen docenten die op mijn manier de leerstof voor hun leerlingen ordenden. Het *Weten dat* zat voor een tijdje wel goed, maar de rest? En van bovenaf begonnen nieuwe winden te waaien, die het gehele onderwijs in de wiskunde voor het eerst sinds eeuwen op haar grondvesten deed schudden. De New Math als antwoord op de eerste Spoetnik, waarmee de Sovjet-Unie de westerse wereld aftroefde. Weg met Euclides! Vervang het onderwijs in al die verouderde technische vaardigheden door onderwijs in de eenvoudige basisstructuren van de wiskunde, *Weten waarom*. Het wiskundeonderwijs zou een soort moedertaalonderwijs worden, voor iedereen te volgen.
De New Math drong op, terwijl er in Nederland een nieuwe onderwijsstructuur aankwam, want de Mammoetwet was in de maak met mavo-havo-vwo. En een nieuwe opvatting over leren en onderwijzen, actief leren, samenwerkend leren... Zo werden in 1968 op elk niveau drastische onderwijsvernieuwingen beoogd; de *onderwijsstructuur*, het *leerplan* en de *lespraktijk* stonden voor grote veranderingen.
Daarover een volgende keer.

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskunde-didacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

HET MONDELING HERLEEFT

Een experiment in havo-4 waarbij twee onderwerpen versneld werden behandeld en vervolgens mondeling werden getoetst.

[Frank van den Heuvel en Klaske Blom]

Vooraf

Het goed vormgeven van de Tweede fase vergt nieuwe didactische werkwijzen waarmee leerlingen gestimuleerd worden meer verantwoordelijkheid te dragen voor hun leerproces. Op 't Hooghe Landt in Amersfoort werd met dit doel voor ogen besloten om terug te grijpen op een in vroeger tijden niet ongebruikelijke manier van toetsen: een mondeling. Havo-4 leerlingen met wiskunde A1 of A12 konden vrijwillig meedoen aan een experiment waarbij de onderwerpen 'exponentiële groei' en 'modellen' versneld werden behandeld en vervolgens mondeling werden getoetst. De auteurs zijn hierover enthousiast geworden en bespreken in dit artikel de opgedane ervaringen.

Inleiding

Wie van de lezers herkent de volgende situatie? Je geeft les in een havo-4-groep wiskunde A. Gelukkig dit jaar gescheiden met alleen A1- dan wel A12-leerlingen. De klas is goed aan het werk (denk je), de omgang tussen jou en de leerlingen is prima, de leerlingen lijken na een paar maanden bovenbouw gewend aan het systeem van de Tweede fase, de resultaten zijn naar behoren. Kortom, het gaat zo zijn gangetje. Wij hadden zulke groepen en waren tevreden. Totdat onze tevredenheid ietwat voorbarig bleek en de uiterlijk goed verlopende lessen schone schijn. Een schoolbreed aandachtspunt met betrekking tot de Tweede fase was bij ons dit jaar namelijk 'reflecteren op het leerproces'. In dat kader legden we onze leerlingen een vragenlijst voor over dit onderwerp. En we kregen onthutsend eerlijke antwoorden: Sommige leerlingen hadden op het eind van het hoofdstuk 5 van de 60 opgaven gemaakt. De meeste leerlingen besteedden buiten de contactlessen om maximaal 10 minuten per les aan het vak. Opgaven werden niet nagekeken. Dat had ook niet veel zin, want er waren toch nauwelijks uitwerkingen opgeschreven, het antwoord alleen werd ruim voldoende bevonden. Reflectievragen uit het boek werden steevast overgeslagen, het voorbereiden van een les was niet aan de orde, samenvattingen of andersoortige overzichten werden niet gemaakt. En toch: de toetsresultaten waren redelijk en voldeden aan de verwachtingen van zowel leerlingen als docenten. Misschien herkent u ook het volgende: in havo-5, nu met alleen nog de A12-ers, staan de resultaten zeer sterk onder druk. In een klap wordt er veel meer van de leerlingen gevraagd op wiskundig gebied. Het abstractieniveau is veel hoger (differentiëren!) en velen blijken niet in staat om de nu ontstane moeilijkheden het hoofd te bieden. Dit feit, samen met bovengenoemde constateringen, waren onverteerbaar voor ons. We trokken de volgende conclusie: als veel havo-4 leerlingen met erg weinig investering tot redelijk goede resultaten komen en ze in havo-5 onderuit gaan omdat ze niet weten hoe ze moeten werken, is er iets mis met ons wiskundeonderwijs: het is niet motiverend, niet uitdagend en niet efficiënt als je zonder noemenswaardige inspanning toch voldoendes haalt en vervolgens het leren verleert.

Het experiment

Een dergelijke constatering kon niet zonder gevolg blijven; we voelden ons geroepen om in ieder geval

een poging te doen, verandering te brengen in deze situatie. Ons idee was als volgt: we willen de leerlingen uitdagen om sneller en beter de stof te verwerken en ze dwingen om meer te reflecteren op het geleerde. Daartoe bieden we hen de mogelijkheid om de stof, over exponentiële groei en modellen, uit de derde periode van het jaar in kortere tijd te bestuderen en er vervolgens in tweetallen een mondeling over te doen in de weken voorafgaand aan de toetsweek. De 'normale' schriftelijke toets vervalt daarmee (een jaar op 't Hooghe Landt bestaat uit vijf perioden die elk worden afgesloten met een toetsweek). Voor de leerlingen had dit zeker voordelen: in de drukke toetsweek hadden zij minder te doen en van ons mochten ze de 'gewonnen' tijd naar eigen inzicht besteden (bijvoorbeeld aan het voorbereiden van andere vakken). Maar wij hoopten natuurlijk vooral dat ze door samen voor te bereiden meer gingen praten over de stof, waardoor ze zich die dus beter eigen zouden maken. Bovendien leek het ons stimulerend en motiverend om eens een keer 'iets anders' aan te bieden dan een gewone toets, en ook wilden we ervaren of leerlingen zich anders zouden manifesteren als ze het geleerde ook voor ons onder woorden zouden moeten brengen. Om het effect van een goede samenwerking te optimaliseren, hebben we leerlingen zelf de tweetallen laten samenstellen.
In eerste instantie reageerden de leerlingen wel enthousiast, maar ook wat afwachtend. De onbekendheid met en de angst voor een mondeling (voor wiskunde!) deed een aantal toch terugschrikken. Uiteindelijk durfde ongeveer een kwart van onze leerlingen het experiment aan.

Ervaringen

Reflectie op het leren en het geleerde

Leerlingen voelden haarscherp aan dat een mondeling in tweetallen een andere voorbereiding vraagt dan de gebruikelijke toetsvorm. Ze voerden gesprekken over bijvoorbeeld de volgende vragen: Hoe bereid ik me normaal voor op een toets? Wat kan de kracht zijn van het voorbereiden in tweetallen? Hoe kunnen we elkaars sterke kanten benutten als we mogen samenwerken?
Het was zeer hoopgevend om te zien en horen dat reflecteren op het eigen leerproces nu kennelijk de moeite waard was om te doen.
De meeste koppels werkten efficiënt en intensief samen. Ze werkten in hun eigen tempo de stof en opgaven door, stelden vragen als dat nodig was en gingen verder zelfstandig hun eigen gang. Tijdens de mondelingen konden we duidelijk horen dat sommige koppels veel hadden overlegd hadden, veel hadden gesproken over de kern van de stof; ze kwamen met een goed verhaal en vulden elkaar aan waar dat nodig was. Het was één van de hoogtepunten van het experiment om te zien hoe ze in staat waren hun leren zelf vorm te geven. Er was bijvoorbeeld een A1-groepje dat zich geheel zelfstandig verdiept had in de werking van logaritmisch papier; dit deel van de stof hoorde niet tot hun programma, maar ze deden het erbij om een 'goede indruk' te maken, en dat werkte! Ze bleken heel goed in staat om de essentie van dit stukje stof te doorgronden met behulp van hun theorieboek en de bijbehorende opgaven. Wat verder goed werkte was dat we in de voorbereiding ieder koppel een opgave over modellen gegeven hadden die ze moesten voorbereiden (zie de voorbeeldopgave in figuur 1). Ze wisten dus zeker dat ze daarover vragen zouden krijgen. Omdat de meesten dit ook goed voorbereid hadden, lukte het om het gesprek hiermee op gang te krijgen en de grootste spanning eraf te halen. Overigens was ook hierbij opvallend hoe verschillend de groepjes met deze opgave hadden gestoeid.

Praten over wiskunde leidt tot een betere verwerking van die wiskunde

Voor het deelnemen aan een mondelinge toets voor wiskunde moeten leerlingen over andere vaardigheden beschikken dan voor een 'gewone' schriftelijke toets. Om er enkele te noemen: communicatief zijn, redelijk snel kunnen reageren op een vraag, hardop kunnen nadenken over een wiskundig probleem, niet te zenuwachtig worden van de nabijheid van twee wiskundedocenten. De meeste leerlingen realiseerden

FIGUUR 1 Een voorbeeldopgave

Opdracht over hs. 6, 'Modellen'
voor de mondelinge toets Wiskunde A1 of A1,2

Opdracht voor: .... en ....

Datum en tijdstip mondeling: ....

Het is de bedoeling dat jullie deze opdracht gezamenlijk voorbereiden en de uitwerkingen meenemen naar het mondeling. Deze uitwerkingen gebruiken we dan als een opstap om de stof van hs. 6 te toetsen.
Lees de volgende tekst goed door en beantwoord de drie daaronder staande vragen.

Files kunnen door verschillende omstandigheden ontstaan. Wegwerkzaamheden, een ongeluk of het einde van een voetbalinterland kunnen bijvoorbeeld de oorzaak zijn van het ontstaan van een file. De laatste jaren zijn door de overheid maatregelen genomen om het aantal en de lengte van files terug te brengen. Zo zijn er borden boven de wegen aangebracht waarop de verkeerspolitie de maximum snelheid kan aanpassen aan de drukte. Het effect van deze maatregelen is tot nu toe zeer beperkt.
De automobilist die in een file terecht komt, wil er zo snel mogelijk weer uit komen. Hij wil dus zo snel mogelijk rijden. Ook de verkeerspolitie wil dat een file zo snel mogelijk weer oplost. Zij wil dat bereiken door een vlotte doorstroming op gang te houden. Dat wordt niet bereikt door zo hard mogelijk te rijden, maar door gedisciplineerd te rijden. De wensen van automobilist en politie staan dus op gespannen voet.
De politie wil de optimale doorstroomsnelheid kunnen berekenen. Zij kan dan deze snelheid aangeven op signaalborden boven de weg. De auto's houden zich dan allemaal aan dezelfde snelheid en zullen met een voldoende ruime onderlinge afstand snel weer uit de file zijn.
De formule waarmee de doorstroming D berekend wordt, is:

$$D = \frac{1000v}{60(0{,}0075v^2 + l)}$$

Hierbij is v de snelheid van de auto's in km/uur en l de gemiddelde lengte van de auto's in meters.

Vraag 1
Beschrijf de modelcyclus aan de hand van bovenstaande situatie.

Vraag 2
Welke aannames kun je vinden in bovenstaande tekst? Welke aannames worden niet duidelijk genoemd, maar zijn naar jullie mening wel gemaakt?

Vraag 3
Had dit model ook anders opgesteld kunnen worden? Welke verbeteringen en/of alternatieven zijn er bij de geschetste situatie mogelijk?

zich dit terdege, sommigen schrok dit af. Tijdens de mondelingen waren de meeste leerlingen zenuwachtig bij de start, raakten ze meer op hun gemak en praatten en dachten vrijer naarmate het gesprek vorderde. Met name als ze zich gingen realiseren dat het niet perse noodzakelijk was om onmiddellijk het 'enige goede' antwoord te geven, maar dat je ook samen in een gesprek iets 'op kunt bouwen' waarmee je je kennis kunt laten blijken, gaf dat hier en daar nieuwe moed en onverwachte mogelijkheden. Ook het gegeven dat je door een lichte bijsturing van onze kant een verkeerd spoor kunt onderkennen en weer verlaten was een bijzondere ervaring voor ze. Bij een schriftelijke toets bestaat zo'n terugkoppeling immers niet.
De indruk bestaat dat de onderwerpen exponentiële groei en modellen beter doorgewerkt en verwerkt zijn dan de andere onderwerpen dit jaar. Enerzijds heeft het hardop bezig zijn met de stof als effect dat leerlingen veel bewuster met het onderwerp bezig waren, anderzijds waren ze met zijn tweeën beter in staat om hoofd- en bijzaken van elkaar te onderscheiden waardoor ze tot de kern doorgedrongen zijn.

Stimulans en motivatie door 'iets anders'

Het behoeft nauwelijks betoog dat het uiteraard motiverend werkt om de sleur van *zeven-weken-sommen-maken-met-een-toets-als-afsluiting* te doorbreken. Veel van de leerlingen die niet aan het experiment meegedaan hebben, wilden alsnog graag een mondeling doen in een volgende periode. Organisatorisch was dat niet haalbaar, maar voor een volgend jaar beraden wij ons op een mogelijkheid voor iedereen.

Tot slot: een aanbeveling

Ons inziens heeft dit experiment een positieve bijdrage geleverd aan het verbeteren van ons wiskunde-onderwijs: het voorbereiden op en uiteindelijk doen van een mondelinge toets was motiverend en uitdagend. In de meeste koppels is gewerkt met de nodige inspanning, meer of minder efficiënt. De resultaten waren uiteenlopend, met opvallend veel 'goede' koppels, misschien veroorzaakt door de vrijwilligheid van deelname. Belangrijk is dat leerlingen ervaren hebben hoe ze hun leren kunnen intensiveren en verbeteren.

Uiteraard is de tijdsinvestering voor ons docenten behoorlijk hoog geweest. Elk mondeling duurde 25 minuten en werd afgenomen door twee docenten. Het gezamenlijk afnemen bleek zeer plezierig en maakte ook daarom de investering de moeite waard; de 'eigen' docent nam het voortouw, de ander stelde zonodig aanvullende vragen. Van te voren hadden we een reeks vragen geformuleerd als een soort minimumhoeveelheid van wat we aan de orde wilden laten komen. Het was leuk en leerzaam om elkaar aan het werk te zien. Voor de uiteindelijke beoordelingen was het goed om een redelijk overzicht en dus ook vergelijkingsmateriaal te hebben over de geleverde prestaties.

We hebben veel van dit experiment geleerd, het heeft onze inzichten in de leerprocessen van de leerlingen verhoogd. Ons idee dat werken aan een succesvolle vormgeving van de Tweede-fasegedachte vereist, dat je (een deel van) je lesmethoden aan een grondige revisie wenst te onderwerpen, is hiermee bevestigd. Het stimuleert ons in ieder geval om verder te gaan op deze weg.

Nog wat feiten en gegevens

- Wij gebruiken de methode *Pascal*. Deze leent zich ons inziens goed voor het zelfstandig doorwerken van een stuk stof.
- Het idee om een (pittige) vraag over modellen op voorhand mee te geven en hierover op het mondeling vragen te stellen bleek heel goed te werken.
- 20 à 25 minuten per koppel is genoeg om goed zicht te krijgen op de prestaties.
- Het mondeling samen met een collega afnemen is prettig en nuttig.
- Er was uiteindelijk één koppel dat ver onder de maat bleef. De andere scoorden voldoendes waarbij er tussen de koppels onderling wel grote verschillen optraden. In een paar gevallen hebben we de leerlingen afzonderlijk beoordeeld, omdat de prestaties te veel van elkaar afweken.
- We stelden zowel vragen waarop leerlingen samen mochten antwoorden en elkaar konden aanvullen, als vragen waarop ze individueel moesten antwoorden. Het beeld over ieders afzonderlijke capaciteiten werd daarmee voldoende duidelijk.
- Met name relatief zwakkere leerlingen bleken beter te presteren dan degenen die wij 'hoger' ingeschat hadden.
- Collega's en schoolleiding reageerden zowel verbaasd als enthousiast. Zo'n experiment kan dus ook bijdragen aan een verbetering van het imago van ons vak.
- Als je twijfelt over de haalbaarheid is ons advies: gewoon DOEN!

Over de auteurs

Frank van den Heuvel heeft ruim 19 jaar onderwijservaring als docent wiskunde; hiervan is hij inmiddels zo'n 10 jaar werkzaam op het Hooghe Landt in Amersfoort, met name in de bovenbouw havo en vwo.
Klaske Blom is bezig aan haar vijfde jaar als docente wiskunde en werkt inmiddels 2? jaar op het Hooghe Landt in Amersfoort, ook vooral in de bovenbouw havo en vwo.
Mocht u nog meer informatie willen, dan kunt u hen bereiken via de e-mail: hvw.heuvel@meridiaan-hl.nl en blw.blom@meridiaan-hl.nl

Een paradoxale keuze

[Rob Bosch]

Twee vazen zijn gevuld met witte en zwarte balletjes. De lezer mag uit een van beide vazen een balletje trekken. Indien u een wit balletje trekt ontvangt u van de redactie van Euclides een boekenbon ter waarde van 50 euro.
De kans op een wit balletje uit vaas 1 is gelijk aan $\frac{1}{4}$. Voor vaas 2 is deze kans gelijk aan $\frac{1}{9}$. Welke vaas kiest u voor het trekken van het balletje? Ik denk dat de lezer, net als ik, kiest voor vaas 1; vaas 1 geeft immers een meer dan 2 keer zo grote kans op de prijs.
De redactie heeft ook nog een CD-bon van 50 euro te vergeven. Daarvoor heeft de redactie twee nieuwe vazen gevuld met witte en zwarte balletjes. Een witte bal is weer prijs. De kans op een witte bal uit vaas 3 is gelijk aan $\frac{4}{5}$ en voor vaas 4 is deze kans $\frac{1}{2}$. Welke van de twee vazen kiest de lezer om de CD-bon in de wacht te slepen?
Wederom ligt de keuze wel erg voor de hand; uiteraard vaas 3.

Vier vazen vinden we achteraf te veel gedoe en daarom maken we een grote vaas met de balletjes uit de vazen 1 en 3 en een grote vaas met de balletjes uit de vazen 2 en 4. De lezer mag weer een balletje trekken uit een van de twee grote vazen. Een witte bal levert nu zowel de boekenbon als de CD-bon op. Welke vaas kiest u?

De keuze lijkt ook hier niet moeilijk. Vaas 1 gaf een grotere kans op de boekenbon dan vaas 2 en vaas 3 gaf een grotere kans op de CD-bon dan vaas 4. De vaas met de balletjes uit de vazen 1 en 3 zal dus wel een grotere kans op beide bonnen geven dan de andere vaas of niet soms...?
Inderdaad soms niet!
De redactie had de vier vazen namelijk als volgt samengesteld.

	Boekenbon		CD-bon	
	Vaas 1	Vaas 2	Vaas 3	Vaas 4
Wit	18	1	8	45
Zwart	72	9	2	45

De lezer kan uit de tabel nagaan dat deze samenstellingen leiden tot de eerder genoemde kansen. De samenvoeging van de vazen 1 en 3 en de vazen 2 en 4 geeft de volgende verdeling.

	Boekenbon en CD-bon	
	Vaas (1 + 3)	Vaas (2 + 4)
Wit	26	46
Zwart	74	54

De kans op een wit balletje uit de vaas (1 + 3) is gelijk aan 26/100 = 0,26 terwijl de kans op een wit balletje uit vaas (2 + 4) gelijk is aan 46/100 = 0,46. De kans op de bonnen is dus aanzienlijk groter als we kiezen voor de tweede vaas.

Literatuur

G.R. Grimmett, D.R. Stirzaker: Probability and Random Processes, Oxford University Press (3rd edition, 2001)

Over de auteur

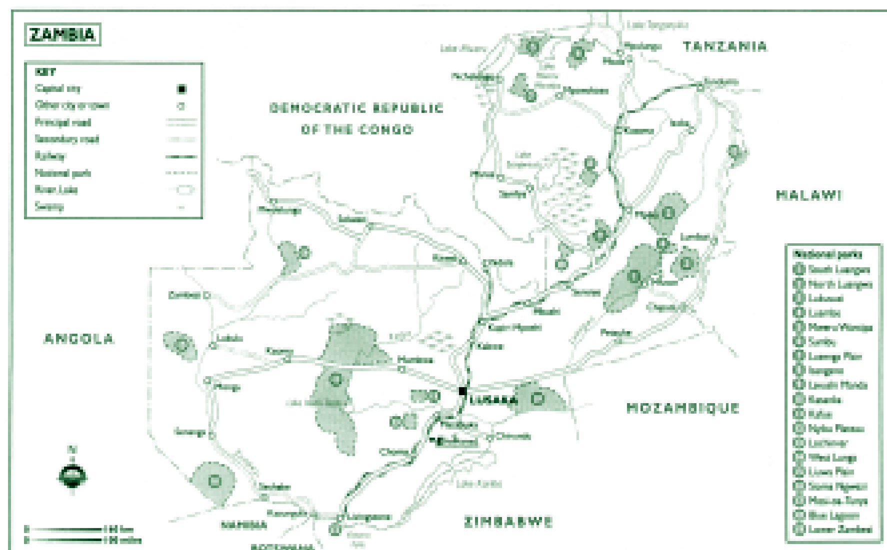
Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

WISKUNDEBOEKEN VOOR EEN PABO IN ZAMBIA

[Ger Jongeling]

Wiskundedocent in Zambia

Miriam Vroonhof heeft een kleine twee jaar als docent wiskunde gewerkt aan het Charles Lwanga Teachers' Training College (CLTTC) in Chikuni, Southern Province, Zambia. Zij heeft onbetaald verlof genomen uit haar reguliere baan aan de HEAO-Arnhem en is uitgezonden door VSO, een van oorsprong Britse vrijwilligers-organisatie. Wat haar dreef is de behoefte om duidelijker te voelen dat haar werk in een behoefte voorziet en om beter contact te hebben met de studenten. In haar reguliere baan was dit de laatste jaren aardig weggeërodeerd. Voordat Miriam in Zambia ging werken had ze geen ervaring met het opleiden van leraren. Wel had ze ter voorbereiding bij de Pabo van een zusterfaculteit in Arnhem geïnformeerd naar rekendidactiek. In Zambia bleek ze ook niet meer specifieke kennis op dit gebied nodig te hebben. Er waren ginds een paar syllabi voor docenten voorhanden en wat daar niet in stond wist ze zelf wel aan te vullen.



Een Pabo in een missiepost

CLTTC is een Pabo die ligt in het gehucht Chikuni, 20 km asfalt en 12 km zandweg verwijderd van de dichtstbijzijnde 'stad', Monze. In de regentijd is het nog verder, want dan is een deel van de kortste weg onbegaanbaar. Chikuni is rond 1900 begonnen als een missiepost van de paters Jezuïeten, die in 1949 een middelbare school (een internaat voor jongens) zijn begonnen. Daarna zijn er nog een dagschool voor meisjes, een *Teachers' Training College*, een ziekenhuis en een radiostation bij gekomen. Het radiostation dient als plaatselijke krant en dorpsomroeper en verzorgt ook uitzendingen met schoolradio. CLTTC is eveneens een internaat, want Zambia is erg uitgestrekt en dunbevolkt. De studenten komen veelal uit afgelegen dorpen en gehuchten; de reistijd naar Chikuni is vaak minstens een hele dag. Overigens is er in die dorpen doorgaans geen elektriciteit of stromend water; als er een pomp is, is dat al heel wat. De woningen zijn gebouwd van stokken met leem ertussen gesmeerd en hebben een rieten dak; rijkere mensen hebben kunnen



FOTO 1 Wiskundeles aan eerstejaars studenten van Charles Lwanga TTC (CLTTC)



FOTO 2 Studenten van CLTTC

bouwen met zelf gemaakte bakstenen en misschien een dak van ijzeren golfplaten. Men verbouwt maïs, suikerriet, of men vist. Koken doet men op houtskool of sprokkelhout. Overal scharrelen kippen rond en de wat welgestelde boer heeft enkele koeien om een ploeg te trekken. Valt de maïsoogst tegen, zoals vorig jaar en dit jaar, dan wordt er honger geleden. Dit jaar is er nauwelijks sprake van een oogst in de Southern Province. Er is in de regentijd veel te weinig regen gevallen. Zambia is een van de allerarmste landen op aarde.

Voorheen kregen Zambiaanse onderwijzers een tweejarige opleiding: twee jaar theorie met tijdens beide jaren een maand stage. Twee jaar geleden is er een nieuw landelijk curriculum gekomen, ZATEC, waarin de studenten één jaar theorie hebben en één jaar stage. Op deze wijze kunnen binnen de bestaande TTC's twee keer zoveel onderwijzers worden opgeleid als voorheen. De reden hiervoor is de enorme behoefte aan leerkrachten. Mede vanwege de Aids-problematiek is het sterftecijfer zo hoog, dat er jaarlijks meer leerkrachten overlijden dan er nieuwe afstuderen. In Zambia is de dood steeds dichtbij en de levensverwachting is laag. Je ziet er weinig grijsaards.

Het TTC is in de jaren '50 gebouwd en in de tussenliggende tijd is er onder andere een bibliotheek met een ruime studiezaal bijgebouwd. Dat is maar goed ook, want die bibliotheek is de enige bron van schriftelijk onderwijsmateriaal. Wij zijn gewend dat leerlingen c.q. studenten er zelf voor zorgen dat zij boeken hebben, maar in Zambia kan geen student dat betalen. Het collegegeld is vaak al een probleem, evenals reisgeld naar CLTTC en terug. Voor ieder vak geldt dat de studenten als huiswerk wekelijks onderwerpen en opdrachten opgegeven krijgen die zij moeten bestuderen aan de hand van studieboeken die geschreven zijn voor *grade 1-7* (basisschool) of *grade 8-12* (middelbare school). Boeken speciaal voor TTC's zijn er in Zambia niet, althans niet voor wiskunde.

Het WwF-project

Het lesgeven bestond onder andere uit het uitleggen van het rekenen, maar ook over het waarom, hoe uit te leggen aan de kinderen en wat voor leermiddelen er gebruikt kunnen worden. Natuurlijk ging het er ook over hoe deze leermiddelen gemaakt konden worden uit lokale materialen, zoals bijvoorbeeld kroonkurken, want er is niets voorhanden op de lagere scholen. Er wordt dan ook van de studenten verwacht dat ze creatief zijn.
De studenten wisten vaak nog wel de trucjes en de regels, maar absoluut niet wat er achter stak. Miriam vroeg dan ook vaak: 'Waarom is het zo?' Tijdens de lessen werd hier vaak in groepjes over gediscussieerd. De studenten hadden nooit geleerd om zelf na te denken en nu moest daar dan ook aandacht aan besteed worden. Ook werden de studenten gedwongen tot zelfstudie door opdrachten te maken in groepsverband of alleen. Die opdrachten bevatten dan het maken van leermiddelen en het beantwoorden van didactische en toegepaste wiskundige vragen.

Tijdens de wiskundelessen worden verschillende onderwerpen behandeld: verzamelingenleer, de vier bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen), talstelsels (niet alleen het tientallige en het binaire stelsel, maar ook het 5-, 8- en 12-tallig stelsel), factoren en veelvouden, twee- en driedimensionale figuren, metingen (gewicht, capaciteit, temperatuur, lengte en tijd), simpele foutenanalyse (wat voor fouten



FOTO 3 Groep 3-4 (vertaald naar Nederlandse begrippen) van de Community School



FOTO 4 Groep 5-6 van de Community School

leerlingen kunnen maken bij het rekenwerk), breuken en economische toepassingen. Naast deze onderwerpen worden ook meer algemene besproken, zoals verschillen tussen jongens en meisjes wat betreft wiskunde, filosofie van het rekenonderwijs, HIV/aids en natuurlijk ook het opstellen van jaar-, week- en lesplanningen. Doordat er een groot gebrek is aan boeken, zijn de studenten erg afhankelijk van aantekeningen die zij maken tijdens de lessen.

Boeken vinden de studenten in de bibliotheek. Vergeleken met de Nederlandse situatie is dit verre van ideaal, maar in de Zambiaanse context is dit voorlopig het enig haalbare. Het werkt ook wel en het stimuleert de zelfredzaamheid van de studenten, maar dan moet de collectie in de bibliotheek wel toereikend zijn. Dat was op het gebied van rekenen/wiskunde bepaald niet het geval. Er waren veel te weinig boeken en ze waren verouderd. Vandaar dat Miriam een aanvraag heeft gedaan bij het Wereldwiskunde Fonds voor financiering voor uitbreiding van de collectie. Het doel was om te zorgen voor meer boeken en om tegelijkertijd de collectie een beeld te laten geven van wat er in Zambia beschikbaar is. De studenten weten immers nog niet met welke methode(n) zij in de praktijk te maken zullen krijgen. De WwF-werkgroep heeft de aanvraag goedgekeurd en er zijn 282 boeken gekocht met een gezamenlijke waarde van € 3600. Hiermee kan het TTC voorlopig weer een aantal jaren vooruit.

De studenten zijn ouder dan wij hier gewend zijn: velen hebben zelf reeds kinderen. De studenten zijn steeds een heel trimester intern op de campus, dus getrouwde studenten zijn ver van hun gezin. Studentes die zwanger worden, getrouwd of niet, moeten de studie voor een of twee jaar onderbreken, zo is de regel, maar wie bij de *graduation* zwanger verschijnt, krijgt toch haar *certificate*. Voor mannelijke studenten die een vrouw zwanger maken ligt dit minder eenduidig.
De studenten zijn over het algemeen zeer gemotiveerd, meer dan wij hier gewend zijn. Men is leergierig en werkt hard. Studenten en docenten wonen op de campus en Miriam had regelmatig studenten en ook middelbare scholieren over de vloer die om extra uitleg kwamen, soms ook om de telefoon te gebruiken of om een boterham. Die uitleg hoefde zij niet altijd zelf te geven: men helpt als het zo uitkomt ook elkaar wel. Zij deden ook wat terug: Miriam hoefde meestal niet zelf af te wassen.

Onderwijs voor de allerarmsten

Al het onderwijs was vroeger gratis, maar met het ineenzakken van de Zambiaanse economie is dat veranderd. Bovendien vereist iedere middelbare en basisschool dat de leerlingen in een schooluniform verschijnen, wat ook geld kost. Het gevolg is dat de kinderen van de allerarmsten verstoken blijven van onderwijs. Naast het TTC is in de loop der jaren een dorp ontstaan en hier en ook in de dorpjes in de omgeving wonen nogal wat mensen die het zich niet kunnen veroorloven om hun kinderen naar de reguliere basisschool te sturen. Om hier wat aan te doen hebben enkele voorgangers van Miriam, ook VSO'ers, een C*ommunity School* opgericht. Deze school leidt op t/m *grade 7* en wordt bemenst door CLTTC-studenten, die op vrijwillige basis les geven. Iedere leerling krijgt per week vier dagdelen les. De ouders betalen hiervoor € 0,85 per jaar. De *Community School* woont nu nog in bij het TTC, maar de ouders en de dorpsgemeenschap zijn een project begonnen om een

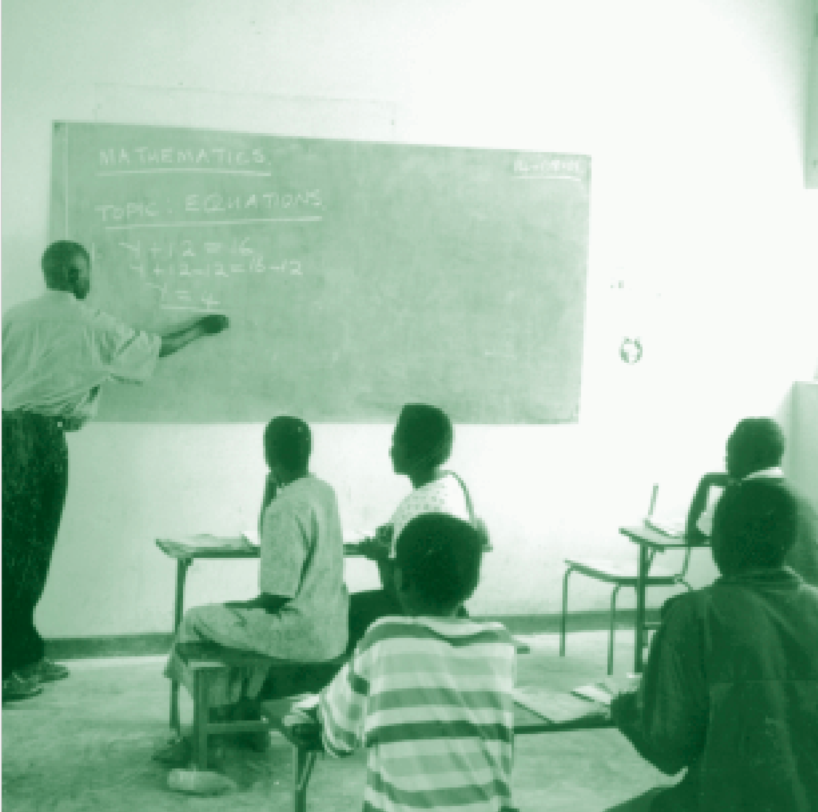


FOTO 5 Groep 8 van de Community School



FOTO 6 Studenten 's avonds aan het werk in de bibliotheek van CLTTC

eigen gebouw neer te zetten, midden in de *community* en met eigen handen gebouwd. Het probleem is nog om voldoende geld bij elkaar te krijgen om de materialen te kopen.
De *Community School* heeft gelukkig wel wat krijtjes en schriften, maar doet het zonder boeken. Een klein deel van de aanvraag aan het WwF betrof dan ook geld voor reken-/wiskundeboeken voor de *Community School*. Het maakt een wereld van verschil voor de kwaliteit van dit onderwijs. Momenteel heeft de *Community School* gemiddeld zo'n twintig leerlingen per *grade*.

Weer wennen aan thuis

In augustus zat Miriams termijn in Zambia er op en kwam zij weer terug naar Nederland. Dat is wel wennen. Het leven in Zambia is meer relaxed dan in Nederland; het gezegde 'tijd is geld' kent men niet. Afspraken kun je maken, maar dat is geen garantie dat men die ook nakomt; vaak komt er wat tussen. Doordat niemand telefoon heeft, kan men niet even bellen om de afspraak te verzetten. In het begin was dat voor Miriam even wennen, maar al spoedig was zij zelf ook zo. Weken tevoren plannen om iemand te bezoeken was er niet bij. Je kunt gewoon bij mensen binnen vallen zonder aankondiging en iedereen is even enthousiast als er bezoek komt. Er is geen sprake van 'vandaag komt het niet gelegen' of 'kun je morgen of, beter nog, volgende week terug komen'. Doordat studenten en docenten op de campus wonen, is er onderling veel meer contact dan in Nederland. Ook was er tijdens de lessen tijd genoeg om alle stof goed door te nemen en soms was er ook tijd om tijdens de les of daarbuiten over andere interessante onderwerpen te praten: emancipatie (staat momenteel erg in de belangstelling in Zambia), HIV/aids, ethiek, en in Miriams geval natuurlijk ook: cultuurverschillen. In Nederland zal zij vooral ook dit contact met de studenten erg missen. Het onderwijs in Nederland vindt zij de laatste jaren, vooral op hbo-niveau, veel onpersoonlijker geworden en tijd om zwakkere studenten te helpen is er nauwelijks.

Daarnaast zal zij de stagebezoeken missen aan studenten die vaak in de meest afgelegen gehuchten geplaatst waren en onder voor onze begrippen uiterst primitieve omstandigheden moesten wonen en werken. Meestal was het zo ver weg, dat de reis twee dagen duurde. Miriam heeft geslapen in klaslokalen en andere onderkomens waar wij ons hier geen voorstelling van kunnen maken.

Miriam heeft veel vrienden gemaakt in Zambia en veel herinneringen meegenomen. Het vertrek naar Nederland was een moeilijk afscheid, zowel voor haar als voor de vele Zambiaanse vrienden. Uiterlijk over twee jaar gaat ze er heen, op vakantie ditmaal, om iedereen weer te zien.

Over de auteur

De auteur, Ger Jongeling, is Miriams levenspartner. Hij heeft haar in Zambia vier keer bezocht. Zijn e-mailadres is ger.jongeling@edu.han.nl
Het e-mailadres van Miriam zelf is Miriam.Vroonhof@heao.han.nl



ENERGIZERS

Voor LWOO-docenten, maar eigenlijk voor elke docent: opdrachtjes waarbij leerlingen even hun energie kwijt kunnen!

[Ingrid Berwald]

Wat zijn energizers?

Steeds meer scholen maken in de mentorlessen gebruik van energizers: korte opdrachtjes waarbij de leerlingen in beweging zijn. Op deze manier kunnen ze even wat energie kwijt, om vervolgens goed mee te kunnen doen in de les. Energizers hebben uiteraard ook een lesdoel. Tijdens mentorlessen is dat doel bijvoorbeeld kennismaken, groepjes vormen of leren samenwerken. Vaak is het advies om niet alleen in de mentorlessen maar ook tijdens andere lessen van energizers gebruik te maken.

Energizers en wiskunde

Ook wiskundelessen kunnen heel goed met een energizer beginnen. Het niveau van de leerling is daarbij niet van belang.
Er zijn verschillende soorten energizers in de wiskundelessen te gebruiken:
- groepjes vormen met een vervolgopdracht,
- introductie van een nieuw onderwerp,
- informatie geven zonder zelf veel te praten.

Groepjes vormen met een vervolgopdracht

Een heel makkelijke manier om heterogene groepjes te vormen is de energizer met de kaartjes.
Je maakt net zoveel kaartjes als er leerlingen in de klas zitten. Het aantal kaartjes dat bij elkaar hoort bepaalt de groepsgrootte. De kaartjes moeten te maken hebben met het onderwerp van de les. Dit soort energizers is snel en eenvoudig te bedenken. Een voorbeeld:
Bij het onderdeel statistiek gebruik ik het M&M-practicum nogal eens; zie pagina 238*. Bij dit practicum werken de leerlingen in groepjes van vier aan een opdracht met M&M's, een soort snoepjes. Voor 23 leerlingen heb je dus 5 × 4 en 1 × 3 kaartjes nodig. Je kunt dan kaartjes maken met daarop een plaatje van een M&M-snoepje in een bepaalde kleur (4 × rood, 4 × geel, enzovoorts). De leerlingen trekken aan het begin van de les een kaartje en vormen samen met de leerlingen met dezelfde kleur M&M een groepje. De leerlingen lopen dus even door de klas, weten dat de les met M&M's en kleuren te maken heeft, en gaan vervolgens samenwerken in heterogene groepjes.*

Introductie van een nieuw onderwerp

Op een soortgelijke manier als hierboven kun je nu vrij eenvoudig een nieuw onderwerp introduceren.
Het hoofdstuk ruimtefiguren is aan de orde. Voordat er met het hoofdstuk begonnen wordt, is er een energizer om het onderwerp te laten leven. Bij zo'n hoofdstuk kun je denken aan kaartjes met allerlei ruimtefiguren erop. Leerlingen zoeken dezelfde figuren bij elkaar. Je hebt nu groepjes leerlingen en elk groepje vertegenwoordigt een andere ruimtelijke figuur. Laat de leerlingen opzoeken hoe de figuur heet die op het kaartje staat, welke vorm de zijvlakken hebben, enzovoorts. Het hangt natuurlijk af van het niveau van de leerlingen, wat je vooraf al kunt vragen. Het groepje houdt zich 5 minuten bezig met de eigen ruimtelijke figuur en de vragen. Daarna vraag je elke groep: 'Welke figuur heeft jullie bij elkaar gebracht en wat weet je er al van?' Waar zal het de komende lessen over gaan?

Informatie geven zonder zelf veel te praten

Je hebt van die lessen waarbij er nu eenmaal veel verteld moet worden. Een voorbeeld daarvan is het begin van het schooljaar. Bij elke les krijgen de brugklassers te horen wat het vak inhoudt, wat de speciale regels zijn en welke spullen er meegenomen moeten worden. Dit wordt ze wel eens teveel, maar de informatie moet toch gegeven worden. Een energizer biedt ook hier uitkomst.

Je maakt grote kaarten en schrijft daarop wat de leerlingen moeten weten.
Zo schrijf je bijvoorbeeld op kaart 1: 'Spullen: geo, rekenmachine, gum, potlood, ...'
Op kaart 2: 'Klassenregels: Je mag elkaar helpen, je krijgt elke les huiswerk, ...'
Op kaart 3: 'Wiskunde is een mengelmoes van rekenen, tekenen, grafieken, ...'
Eventueel schrijf je alle wiskundeonderdelen los op een kaart met een korte uitleg wat het inhoudt (zoals: 'Statistiek gaat over ...').
Zo krijg je een aantal kaarten. Die kaarten knip je in vier stukken zodat het een puzzel wordt. De leerlingen trekken een puzzelstuk, puzzelen een groepje bij elkaar en gaan bedenken hoe ze hun onderdeel kunnen presenteren (kort). De vraag is weer: 'Wat heeft jullie bij elkaar gebracht en wat kun je er al van vertellen?' Zelf kun je nog wat aanvullende informatie geven als dat nodig is.
In elk geval weet aan het eind van de les elke leerling wat wiskunde is, wat de regels zijn en welke spullen ze mee moeten nemen.

En dit alles zonder dat je zelf een tijd aan het praten bent geweest.

Zonder kaarten

Er zijn natuurlijk ook energizers te bedenken zonder dat er kaartjes gemaakt moeten worden. Bij statistiek is het een manier om informatie te verzamelen. Iedereen die in dezelfde maand geboren is gaat bij elkaar staan. (Welke maand heeft jullie bij elkaar gebracht?) Iedereen met hetzelfde aantal broers en zussen gaat bij elkaar staan. (Welk aantal is de modus?)

Tot slot

Met dit artikel hoop ik mensen aan het denken te hebben gezet over het gebruik van leerlingactiviteiten in de wiskundeles. Zelf geef ik les aan LWOO-kinderen, en voor deze groep is dit echt leuk om even te doen. Ik merk dat de onderwerpen gaan leven en wat langer blijven hangen. Vooral de leerlingen met concentratieproblemen kunnen energie kwijt zonder lastig gevonden te worden. Het druk zijn wordt omgezet in

I. Benvald — wiskunde klas 2 hoofdstuk 4

prakticum

Naam: ____________

cijfer

Maak het zakje M&M's nog **niet** open!

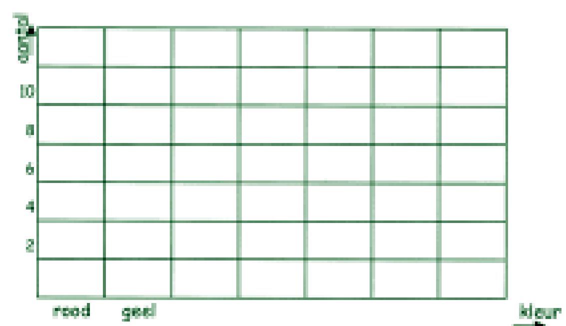
1 Schat hoeveel M&M's er in het zakje zitten. ____________

2 Maak een schatting van het aantal M&M's per kleur. Vul de tabel in.

kleur	aantal
rood	
geel	
totaal	

Klopt het totaal met je schatting?

3 Maak van deze gegevens een staafgrafiek. Kleur de staaf de juiste kleur!



iets positiefs, en daar gaat het bij deze groep toch voornamelijk om. Zelf ben ik blij dat ik energizers geprobeerd heb in de wiskundeles. Het voegt echt iets toe aan mijn lessen. Je bereikt er andere kinderen mee, zoals Valery, die wiskunde maar niets vindt. Met de energizers doet ze wel enthousiast mee, en dat doet ze ook de les die er op volgt. Het samenwerken doet haar goed en ze krijgt steun van groepsgenoten. Of Glenn, mijn stuiterballetje: hij krijgt medicijnen waardoor hij als bijverschijnsel erg druk wordt. Die drukte weet hij gelukkig ook voor zijn werk te benutten, waardoor hij inmiddels drie hoofdstukken voorloopt, maar stilzitten kan hij niet echt. De energizers zorgen er bij hem voor dat hij zijn energie aan het begin van de les kwijt raakt en bovendien wordt de 'stilzit-tijd' die resteert natuurlijk ook korter (dit geldt ook voor kinderen met ADHD). En Jeroen, het buitenbeentje van de groep, moet toch regelmatig samenwerken met klasgenoten en de klasgenoten met hem. Beide partijen leren hiervan. Per klas doe ik ongeveer eens in de zes weken een energizer, al slaan ze bij sommige klassen zo goed aan, dat ik er dan nog wel eens eentje tussendoor doe. In het begin is het misschien even wennen dat de leerlingen lopen in de les, maar dat loopgedeelte duurt een paar minuten en is heel gericht. Bovendien heeft het lopen een functie en de opdracht die op de energizer volgt willen de leerlingen altijd afhebben, dus het kan erg motiverend werken.

Over de auteur

Ingrid Berwald (e-mailadres: ingridberwald@planet.nl) is wiskundedocent aan het IJsselcollege te Capelle aan den IJssel. Daarnaast werkt ze een dag in de week voor het APS, waar zij zich inzet voor LWOO- leerlingen en werken met materialen in de wiskundeles.

Maak nu het zakje open, maar eet nog niets!

4 Tel het aantal M&M's. ______

5 Hoeveel M&M's had jij meer of minder(-) geschat? ______

6 Sorteer de M&M's op kleur.

7 Tel het aantal M&M's per kleur en vul de tabel in.

kleur	aantal
rood	
geel	
totaal	

Klopt het totaal ?

8 Maak van deze gegevens een beeldgrafiek. Neem als eenheid O=2

rood

geel

9 Bereken het gemiddelde aantal M&M's per kleur. ______

______

Je mag de M&M's nu opeten

10 Maak een overzicht van de hele klas door de tabel in te vullen

	groep 1	groep 2	groep 3	groep 4	groep 5	groep 6	totaal
rood							
geel							
totaal							

11 Welke kleur is de **modus**? ______

12 Bereken het gemiddeld aantal M&M's per kleur. ______

13 Welke kleur verschilt het meest met het gemiddelde? ______

14 Welke groep had de meest oneerlijke verdeling per kleur? ______

Leg uit waarom je dat denkt. ______

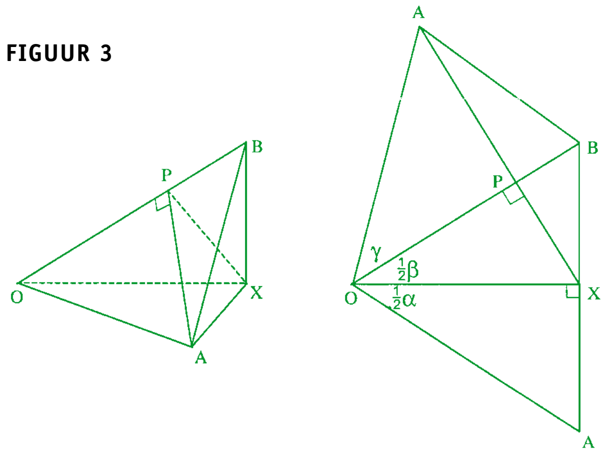
______

______

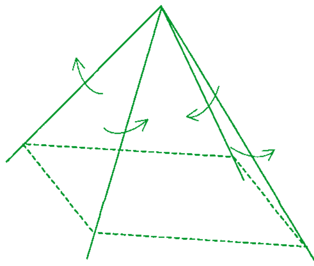
15 Is het totaal eerlijker verdeeld dan de losse groepjes? ______

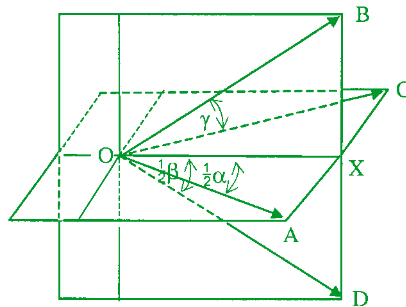
16 Hoeveel zakjes moet je kopen als je ongeveer van alle kleuren evenveel M&M's wilt hebben? ______

17 Bereken hoeveel 1 M&M weegt. ______



FIGUUR 3


FIGUUR 1



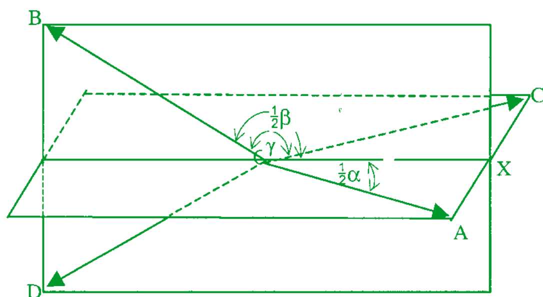
FIGUUR 2

VIER STOMPE HOEKEN OM EEN PUNT, GAAT DAT?

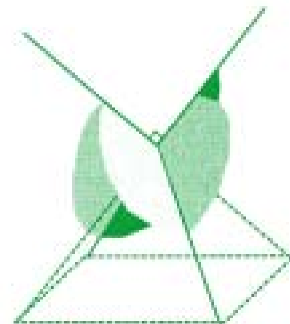
Als je vier hoeken van 120° om een punt wilt plaatsen, moet je de ruimte in. Hoe gaat dat er uitzien?

[Leon van den Broek]

FIGUUR 4



FIGUUR 5



Eenvoudig beginnen

Er passen precies drie hoeken van 120° om een punt. Ze liggen dan vanzelf in een plat vlak. Als je vier hoeken van 120° om een punt wilt plaatsen, moet je de ruimte in. Hoe gaat dat er uitzien?
Eerst maar eens het geval van vier hoeken van 60°. Die pas je gemakkelijk tegen elkaar om een punt: zodoende maak je een viervlakshoek. Dat is heel bekend; denk maar aan de situatie rond een hoekpunt van een regelmatig achtvlak. En dat kan op meerdere manieren, want je kunt de viervlakshoek in één richting smaller maken door twee tegenoverliggende ribben naar elkaar toe te drukken. Hij wordt dan vanzelf breder in de richting daar loodrecht op (de andere twee ribben draaien uit elkaar; zie figuur 1). Bij het regelmatig achtvlak zijn de breedtes in beide richtingen gelijk.
Hoe gaat het eruit zien met vier hoeken van 90°? En met vier hoeken van 120° of een andere stompe hoek? Wat zijn dan de verschillende manieren? Zoals zo vaak bij ruimtemeetkunde, zijn nieuwe situaties maar moeilijk voor te stellen. Experimenteren met educatief materiaal als polydron maakt het meteen duidelijker.

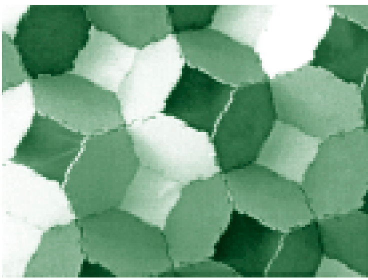
Een formule

We willen ook iets kwantitatiefs zeggen. Duidelijk is dat het probleem afhangt van de grootte van de vier hoeken. Noem die γ.
De viervlakshoek heeft vier benen, zeg OA, OB, OC en OD, in deze volgorde. OA en OC liggen dus tegenover elkaar. De hoeken AOC en BOD hangen samen: hoe groter de een, hoe kleiner de ander. We zoeken een formule voor het verband tussen deze hoeken.

We nemen OA en OC even lang. X is het midden van AC. B en D liggen in het bissectricevlak van hoek AOC. (Dat kun je met congruenties bewijzen.) $\angle AOC$ noemen we α (we kiezen voor α de hoek die kleiner is dan 180°) en $\angle BOD$ noemen we β. Voor $\angle BOD$ nemen we de hoek waar X in ligt; β kan dus groter dan 180° zijn.

We bekijken eerst het geval dat $\gamma < 90°$. $\angle BOD$ is kleiner dan $\angle BOA + \angle AOD$, dus $\beta < 180°$.
We nemen OB en OD even lang en wel zo dat X ook het midden van BD is (zie figuur 2). De hoeken AOB, BOC, COD en DOA zijn allevier γ. Daarom is het grondvlak van de piramide $OABCD$ een ruit (weer vanwege congruenties). Het midden van de ruit is X.
We bekijken een kwart van de piramide: $OXAB$. Deze knippen we open langs ribbe OA en gaan de uitslag met de drie vlakken om O maken; zie figuur 3. We houden zijvlak OXB vast en vouwen de andere twee zijvlakken om respectievelijk OX en OB. Tijdens het neervouwen van driehoek OXA beschrijft A een cirkelboog om middelpunt X; tijdens het neervouwen van driehoek OBA beschrijft A een cirkelboog om middelpunt P: het voetpunt van A op OB.
In de uitslag zie je dat $OP = OA \cdot \cos\gamma$ en ook $OP = OX \cdot \cos\frac{1}{2}\beta = OA \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta$. We hebben dus gevonden: $\cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta$.

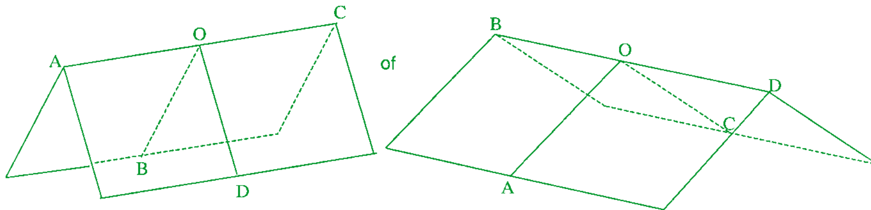
Voor de gevallen $\gamma = 90°$ en $\gamma > 90°$ (zie figuur 4) zijn de plaatjes anders, maar de berekeningen soortgelijk. Deze leiden tot precies dezelfde formule. Dus voor alle hoeken g geldt: $\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta = \cos\gamma$.
Bij gegeven γ zijn er dus oneindig veel mogelijkheden voor α. Bij elke hoek α waarvoor $\frac{1}{2}\alpha < \gamma$ hoort een hoek β. Als α minimaal is, dus $\alpha = 0$, is β maximaal: $\cos\frac{1}{2}\beta_{max} = \cos\gamma$, dus $\beta_{max} = 2\gamma$. Dit klopt met de ervaring: als je de viervlakshoek samenknijpt, wordt de ene breedte 0 en de andere breedte maximaal: dan is $\alpha = 0$ en $\beta = 2\gamma$.



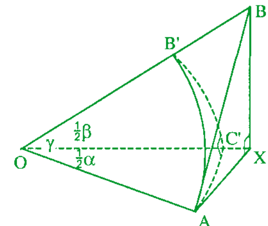


FIGUUR 6

FIGUUR 7



FIGUUR 8



In het symmetrische geval is $\beta = \alpha$ (als γ scherp is) of $\beta = 360° - \alpha$ (als γ stomp is).

Drie mooie gevallen

1. $\gamma = 60°$ *en* $\beta = \alpha$
Dan $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = 1$, zodat $\alpha = \beta = 90°$.
In dit geval hebben we de situatie rond een hoekpunt van het regelmatig achtvlak.

2. $\gamma = 120°$ en $\beta = 360° - \alpha$
Ook dan $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$, *zodat* $\alpha = 90°$ *en* $\beta = 270°$.
Deze situatie krijg je als volgt. Bekijk een hoekpunt van een regelmatig achtvlak. Neem daar twee tegenover elkaar liggende ribben en de verlengden van de andere twee ribben. De vier hoeken van 120° om het hoekpunt zijn in figuur 5 aangegeven.
Met dit mooie geval kun je een regelmatige ruimtestructuur maken. Dat gaat als volgt. Met regelmatige zeshoeken maken we een regelmatig reliëf. De foto (zie figuur 6, links) toont dat reliëf, gemaakt van polydron. Je kunt hiervan verschillende lagen boven elkaar aanbrengen (met de vierkante gaten op elkaar). Zodoende ontstaat een ruimtelijke structuur van regelmatige zeshoeken: om elk hoekpunt vier zeshoeken.
Je kunt het ook anders zeggen. Knot het regelmatig achtvlak af op éénderde van de ribben, zodat er van de grensvlakken regelmatige zeshoeken overblijven (zie figuur 6, rechts). Het afgeknotte achtvlak is ruimtevullend, dat wil zeggen dat je met kopieën ervan de ruimte kunt vullen zonder spleten en zonder overlappingen.

3. $\gamma = 90°$
Dan $\cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos \frac{1}{2}\beta = 0$ en dat kan alleen als $\alpha = 180°$ of $\beta = 180°$. Ook dit klopt met de ervaring. Bevestig vier vierkanten aan elkaar om één punt. Dat kan in een vlakke figuur. Je kunt alleen maar óf om de ene as *AC* draaien óf om de andere as *BD* (zie figuur 7). Dat is ook als volgt met eenvoudige stereometrie rechtstreeks in te zien.
Als *OA* en *OC* niet in elkaars verlengde liggen, staat *OB* loodrecht op vlak *OAC* (want *OB* staat loodrecht op zowel *OA* als *OC*) en evenzo staat *OD* loodrecht op vlak *OAC*. Dus dan liggen *OB* en *OD* in elkaars verlengde (omdat *B* en *D* aan weerszijden van *O* liggen). Dus is altijd *AOC* of *BOD* een rechte lijn.

Pythagoras

De fraaie formule $\cos \gamma = \cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos \frac{1}{2}\beta$ is bekend uit de bolmeetkunde als de stelling van Pythagoras.
Dat zit zo. Snijd de piramide in figuur 3 met een bol met middelpunt *O* en straal *OA*; zie figuur 8. Dan ontstaat de boldriehoek *AB'C'*; die heeft een rechte hoek in *C'*. De zijden *AB'*, *B'C'* en *C'A* zijn bogen van zogenaamde grootcirkels op de bol. De middelpuntshoeken van deze zijden - dat zijn de hoeken *AOB'*, *AOC'* en *B'OC'* - zijn in ons geval achtereenvolgens γ, $\frac{1}{2}\beta$ en $\frac{1}{2}\alpha$.

Noot

Opmerkingen van Jan Smit hebben het verhaal wezenlijk verfraaid. Waarvoor dank.

Over de auteur

Leon van den Broek (e-mailadres: vdbroek@sci.kun.nl) is leraar wiskunde aan RSG Pantarijn te Wageningen, is medewerker van de subfaculteit wiskunde van de KUN, organiseert de Kangoeroe wiskundewedstrijd in Nederland en is auteur van de Wageningse Methode en Ratio.

Boekbespreking / De Nederlandse Wiskunde Olympiade 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden

Uitgever: Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade

ISBN 90 76976 12 0 Prijs: € 12,00 [Rob Bosch]



De Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft een boek uitgegeven met een selectie van 100 opgaven uit de Wiskunde Olympiades van de afgelopen jaren[1]. Negentig van deze opgaven komen uit de eerste ronde van de Olympiades, de overige zijn opgaven uit de tweede ronde.

De opgaven zijn naar thema gerangschikt. Zo zijn er meetkundeopgaven over cirkels, veelhoeken met symmetrie en opgaven waarbij de stelling van Pythagoras een rol speelt. Buiten de meetkunde vinden we thema's als rijen getallen, deelbaarheid, vergelijkingen en redeneren. Van de eerste opgave uit een thema wordt steeds een voorbeeldoplossing gegeven.

De oplossingen van de opgaven uit de eerste ronde staan achter in het boek terwijl van de over het algemeen wat moeilijker opgaven uit de tweede ronde een complete uitwerking wordt gegeven.

De collectie aardige en vaak verrassende wiskunde-puzzels is op zich al zeer de moeite waard. Het boek is echter veel meer dan een prachtig puzzelboek. Aan ieder thema gaat een stukje theorie vooraf dat altijd zeer duidelijk en helder geschreven is. Voor een aantal thema's zoals gelijkvormigheid en congruentie, van breuk naar decimale ontwikkeling en rationale en irrationale getallen is het stukje theorie het best te omschrijven als een prachtige wiskundeles. Bij deze thema's zijn ook extra opgaven over de stof opgenomen. Zo zal de lezer bij het doorwerken van het boek niet alleen zijn puzzelvaardigheid vergroten maar ook behoorlijk wat wiskunde opsteken.

De uitvoering van het boek is al even origineel als de inhoud. De opgaven staan op de linker witte bladzijden terwijl de achtergronden bij de opgaven op lichtblauwe bladzijden zijn gedrukt hetgeen de overzichtelijkheid ten goede komt. Bij een groot aantal opgaven zijn hints gegeven. Deze hints bevinden zich in de marge en zijn in spiegelbeeld geschreven om de neiging tot snelle raadpleging hiervan te onderdrukken.

Met het Olympiadeboek is er voor een toekomstige generatie deelnemers een prima oefenboek ter beschikking gekomen. Verwoede en minder verwoede puzzelaars zullen aan het boek vele uren plezier beleven. Voor het gebruik in het onderwijs zou ik de volgende suggestie willen doen. Maak van een thema uit het boek een project. Laat de leerling de aangeboden theorie bestuderen en daarna de bijbehorende opgaven uitwerken.

Voor dit boek geldt dat iedere wiskundeleraar het meteen zou moet aanschaffen. Bovendien doet hij of zij er verstandig aan de leerlingen te bewegen hetzelfde te doen. Dan zullen zij zien dat wiskunde nog veel leuker kan zijn dan ze in uw lessen al hadden ervaren.

Noot

[1] Het boek is verkrijgbaar in de boekhandel, maar het is ook rechtstreeks te bestellen via de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade:
http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
Zie verder ook Euclides 78-4 (januari 2003), p.167.

Over de auteur van deze bespreking

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

EEN DIDACTISCHE KEUZE OF EEN BLUNDER?

Over een probleem met de grafische rekenmachine dat zich voordeed tijdens een les over de normale verdeling

[Ton Lecluse en Sil van den Hoek]

Inleiding

Dit artikel beschrijft enkele ervaringen met het gebruik van de grafische rekenmachine bij kansrekening. Wij - twee wiskundedocenten van Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven - kwamen onverwacht wat bijzonders tegen tijdens dat GR-gebruik. Het leek ons leuk een aantal avonturen met u te delen.
Allereerst wordt u uitgenodigd de volgende opgave te maken met een TI-83 grafische rekenmachine.

Flessen allesreiniger hebben gemiddeld een inhoud van 507 cl, bij een vooralsnog onbekende standaard-afwijking.
Uit een grote steekproef blijkt dat 18% van de productie minder bevat dan de ideale inhoud van 500 cl.
Neem aan dat de inhoud normaal verdeeld is en bepaal de standaardafwijking.

Deze opgave gaf Ton onlangs als oefening in 6-vwo wiskunde A.

Oplossing in de klas

Eerst een situatieschets maken (zie figuur 1)[1].
Vertaling: $P(I < 500) = normalcdf(0, 500, 507, s) = 0{,}18$.
(Er is geen ondergrens, maar je moet wel een waarde invoeren. Als didactische keuze wordt voor die ondergrens nul genomen. Een negatieve inh oud bestaat immers niet. En 0 ligt erg ver van de waarde 507. Dus dat moet goed gaan.)
Zie figuur 2 voor de invoer in de GR[2].
Calc-Intersect (en drie keer *ENTER* voor de keuze van Y1, Y2 en *Guess*) geeft als oplossing $\sigma = 7{,}65$ cl.
Geen vuiltje aan de lucht. Maar...

De oplossing van een leerling

Invoer in de GR levert figuur 3.
Calc-Intersect (en drie keer *ENTER* voor keuze Y1, Y2 en *Guess*) geeft als oplossing $\sigma = 1067$ cl.
Wat is hier aan de hand?
Met de leerling werd afgesproken hier de volgende les op terug te komen. Zou het een fout van de GR zijn?
Juist na deze les hadden Sil en Ton een tussenuur, waarin zij dit verschijnsel bespraken. Sil opperde, dat er wel eens twee mogelijkheden voor s zouden kunnen zijn. We gingen op onderzoek uit. Eerst maar eens intypen: *normalcdf*(0, 500, 507, 1067.3055)
Resultaat: 0.1799999969.
Die oppervlakte klopt dus.

Sil aan zet: bij een grote standaarddeviatie zou het wel eens kunnen zijn, dat de oppervlakte links van 0 niet verwaarloosbaar is.
Thuis maar eens nader uitgewerkt. Eerst gekeken naar de kansdichtheidsfunctie

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

met μ = 507 en σ = 1067. De grafiek op de computer ziet eruit zoals in figuur 4.
En hier komt de aap uit de mouw. In de oorspronkelijke uitwerking werd ervan uitgegaan, dat de oppervlakte links van 0 verwaarloosbaar klein is. Dat is wel zo wanneer 0 'erg ver' van de verwachtingswaarde verwijderd is. Maar 'erg ver' kan toch 'dichtbij' blijken: in de grafiek van figuur 4 zie je dat de oppervlakte links van 0 wel degelijk flink groot is! Oorzaak: de grote waarde van de standaarddeviatie.

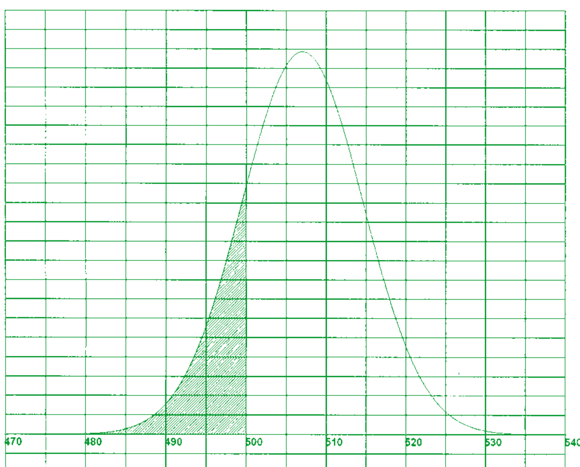
Moraal

Bij het kiezen van de grenzen blijft het belangrijk het omhullende probleem erbij te betrekken. Net als vroeger moet de leerling in staat worden geacht het antwoord vooraf te schatten.
De keuze van de docent was gebaseerd op de van de context afgeleide aanname dat de standaarddeviatie niet al te groot kan zijn, waardoor de oppervlakte links van 0 en rechts van 10 verwaarloosbaar kan worden geacht.
Het gebruik van de *normalcdf*-functie verplicht de gebruiker een ondergrens in te vullen.
De kans $P(X < g) = p$, bij gegeven g, μ en p, moet op de TI-83 vertaald worden in *normalcdf*$(g_l, g_r, \mu, X) = p$, waarbij je voor g_l een verstandige waarde moet kiezen (X staat voor σ).
Maar welke ondergrens je ook kiest, er zijn altijd twee uitkomsten voor σ. Eén ervan is een erg grote, en die moet je meestal niet hebben. Deze maak je (vrijwel) onbereikbaar voor leerlingen door voor de ondergrens een waarde te kiezen, die het oneindige 'redelijk' benadert: de 'grens' van de GR. Bijvoorbeeld -10^{99}.
Vertaal dus $P(X < g)$ in *normalcdf*(-10ˆ99, g, μ, σ) en $P(X > g)$ in *normalcdf*(g, 10ˆ99, μ, σ).
Een 'didactisch verstandige keuze' als 'kies $g_l = 0$, want een negatieve inhoud kan tòch niet' kan tot een ongewenste nevenuitkomst leiden.
De leerling had hier de zaak kunnen redden door bij *Intersect* niet klakkeloos drie keer op *ENTER* te drukken, maar een verstandige *Guess* te geven, bijvoorbeeld 10 in het voorbeeld hierboven. Dan krijg je, ook in diens ongelukkige tekening hierboven, wèl de juiste waarde voor de standaarddeviatie.
Als docent kun je het advies geven: kies voor Xmin en Xmax geen al te grote waarden, en bedenk hierbij waar de uitkomst redelijkerwijs in de buurt moet liggen.
En voor wie nog niet overtuigd is..., is het volgende voorbeeld bedoeld!

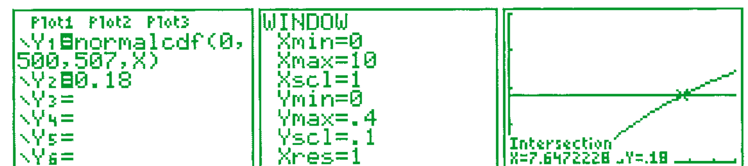
Nog een voorbeeld

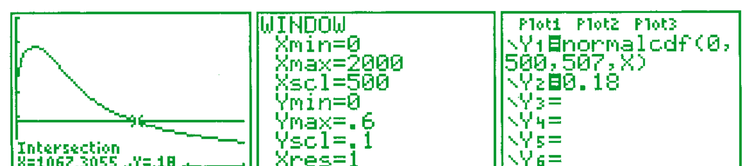
Het saldo van meneer Janssen op zijn lopende bankrekening schommelt nogal. Dit saldo is bij benadering normaal verdeeld (misschien niet reëel, maar we nemen dit hier maar even aan) met een gemiddeld bedrag van € 507.
Op 18% van de dagen staat hij weliswaar niet rood,

FIGUUR 1



FIGUUR 2, 3





maar is het saldo minder dan € 500.
Bepaal de standaarddeviatie van het saldo.
(Of, anders gesteld: Hoeveel procent van de tijd staat hij in het rood?)

Denkt u even na voordat u verder leest!

Oplossing:
Hier zijn beide bovenstaande situaties van toepassing! Er zijn twee oplossingen. De oplossing met de kleine σ, waarbij het saldo dicht om € 507 blijft schommelen, maar ook (wellicht meer reëel) de oplossing met $\sigma = 1067$, waarbij het saldo flink toeneemt als het salaris binnenkomt, maar ook flink afneemt bij bepaalde terugkomende lasten (hypotheek, belastingen). In dat geval is het niet denkbeeldig, dat hij vaak in het rood staat.

Twee oplossingen

In het algemeen zijn er bij onbekende σ twee oplossingen. In bovenstaand voorbeeld is de onderlinge verhouding tussen de twee oplossingen relatief groot, waardoor in een plot waarin je beide snijpunten wilt zien, de linker op de y-as valt, en wellicht vergeten wordt.
Een voorbeeld (zie figuur 5) waarin beide oplossingen wel mooi te zien zijn (zonder verhaal):
normalcdf$(0, 400, 500, X) = 0{,}2$
met als oplossingen $\sigma = 118{,}8$ en $\sigma = 724{,}7$.
Natuurlijk zijn er ook bij een ondergrens van -10^{99} wel voorbeelden te bedenken waarbij de oppervlakte links van zelfs deze grens niet te verwaarlozen is. Maar dat lijkt ons spijkers zoeken op laag water.

De oorzaak van het probleem is eigenlijk de implementatie. Didactisch was het beter geweest als er op de TI-83 drie *normal*-functies zouden zijn, één voor $P(X \le a)$, één voor $P(a \le X \le b)$ en één voor $P(X \ge b)$. Jammer dat alleen de middelste, als *normalcdf*, is geïmplementeerd. Wat dat betreft is de implementatie in de programma's VU-stat en Geocadabra beter geslaagd: hier kan de gebruiker kiezen uit deze drie mogelijkheden afzonderlijk.

Enkele opmerkingen terzijde

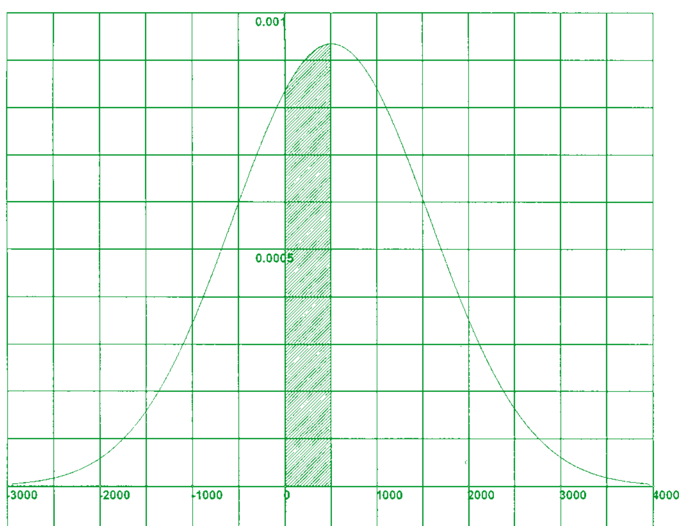
De functies *binomcdf* en *normalcdf* zijn op de TI-83 knap geïmplementeerd, vooral omdat elk van de parameters als variabele kan worden gebruikt. Wellicht een pittig stukje programmeerwerk.
Maar een echte fout is soms niet te vermijden, zoals volgend voorbeeld aantoont.

Opgave
Een stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 171{,}4$ en $\sigma = 7{,}4$.
Bepaal g zo, dat $P(X < g) = 0{,}02$.

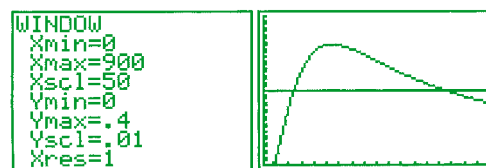
Oplossing:
Zie eerst figuur 6. Kies nu *Calc-Intersect* en druk 3 keer op *ENTER*. En een foutmelding is het resultaat (zie figuur 7).
Wanneer je *Xmin* = 100 instelt, krijg je wèl het verwachte resultaat. *Intersection*: $g = 156{,}2$. Wellicht moet je de X-grenzen niet te ver uiteen kiezen.

Uit het veld zijn ook signalen vernomen, dat *binomcdf* voor grote steekproefgroottes (tussen 1000 en 1000000)

FIGUUR 4



FIGUUR 5



onnauwkeurige antwoorden geeft. Oudere versies van de TI-83 kunnen geen steekproeven boven $n = 1000$ aan (zie de WiskundEbrief-edities van maart 2002). Wellicht dat in toekomstige versies van de GR een en ander verbeterd wordt.

Een creatieve aanpak tot besluit

Tot slot beschrijven we een aardige, creatieve oplossing van een leerling bij een pittige opgave.

Flessen Berenburg zijn gevuld met een inhoud die normaal verdeeld is met $\mu = 751$ en $\sigma = 4$ (uitgedrukt in cl).
Hoe groot moet een steekproef zijn opdat de kans dat de gemiddelde inhoud van de flessen in de steekproef onder 750 cl komt, kleiner is dan 5%?

De oplossing van Annemeike ziet er als volgt uit.
Stel de steekproef omvat X flessen. Stochast T is de totale inhoud van de flessen bij elkaar. T is normaal verdeeld met $\mu = 751X$ en $\sigma = 4\sqrt{X}$. We moeten X zo bepalen dat $P(T < 750X) < 0{,}05$.
Ze voert in:
$Y1 = $ *normalcdf*(0, 750X, 751X, 4$\sqrt{X}$)
$Y2 = 0.05$
Na *Intersect* vindt ze X ª 43,28. Dus de steekproef moet minstens 44 exemplaren bevatten.
Een mooie oplossing met in het functievoorschrift van Y1 één variabele, op drie plaatsen gebruikt.
Een compliment trouwens aan de makers van de TI-83, die het mogelijk maakten dat deze machine dit allemaal aankan.

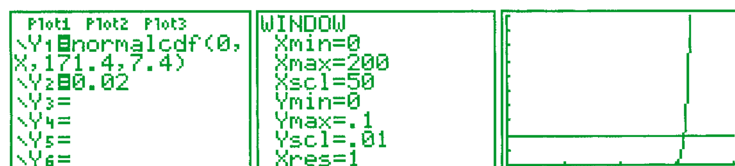
Noten

[1] De grafiek-tekeningen zijn gemaakt met het programma Geocadabra. Van dit programma is een uitgebreide demo te downloaden vanaf www.geocadabra.nl.
Vanwege de problematiek die beschreven is in dit artikel, is in Geocadabra geen normalcdf-functie geïmplementeerd, maar wel de functies normleft, normbetween en normright. Zo is er een analogon voor de binompdf- en binomcdf-functies geïmplementeerd voor trekkingen zonder teruglegging: hyppdf en hypcdf. Aanwezigheid van deze functies op een GR zou het examengereedschap bij de kansrekening een stuk completer maken.
[2] De GR-figuren zijn gemaakt met een TI-83 Plus (red.).

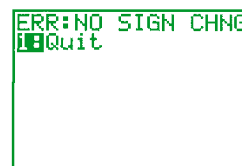
Over de auteurs

Ton Lecluse (e-mailadres: a.lecluse@planet.nl) en Sil van den Hoek (e-mailadres: silvandenhoek@wanadoo.nl) zijn docenten wiskunde aan Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

FIGUUR 6



FIGUUR 7



EEN REIS NAAR POLEN

Van 23 tot en met 29 september 2002 is een groep van 26 Nederlandse wiskundeleraren in Poznan geweest met het doel kennis te maken met het Poolse onderwijssysteem[1]. Het wiskunde-onderwijs stond daarbij natuurlijk in het middelpunt. In deze week hebben we een hoop indrukken opgedaan, informatie gekregen, in groepjes 24 scholen bezocht, lessen bijgewoond en zelf gegeven, de lerarenopleiding op de universiteit bezocht en met opleiders, docenten en leerlingen gesproken.

[Irene Dalm-Hof, Gerrit de Jong, Pieter Peeters, Harrie Renckens en Heiner Wind]

Het schoolsysteem

Recent zijn in het Poolse onderwijssysteem hervormingen doorgevoerd. Het onderwijs in Polen was aan veranderingen toe om de aansluiting met het vervolgonderwijs en het bedrijfsleven te verbeteren, want door de politieke hervormingen in Polen zijn bijna alle fabrieksscholen verdwenen.
Eerst komt nu de zesjarige basisschool voor leerlingen van 7 tot en met 13 jaar. De laatste drie jaar hiervan krijgen de leerlingen les van vakdocenten. Aan het eind hiervan wordt er een toets afgenomen (zoals onze Cito-toets) en gaan alle leerlingen door naar een driejarig *gimnazjum*. Hierbij moet niet aan ons gymnasium, maar meer aan de bij ons bekende middenschool gedacht worden.
Er blijken overigens verschillen te bestaan tussen de diverse gymnasia. Er zijn er namelijk die gekoppeld zijn aan een basisschool. De leerlingen van die basisschool stromen dan meestal door naar dat gimnazjum. Dit zijn vaak leerlingen die in de buurt wonen. Het niveau van zo'n gimnazjum is sterk afhankelijk van de buurt waarin deze school staat.
Andere gymnasia zijn gekoppeld aan een lyceum. De leerlingen worden op zo'n gimnazjum toegelaten aan de hand van het aantal punten dat ze voor een toets gehaald hebben of door deelname aan speciale activiteiten. Hoewel het gimnazjum voor alle leerlingen gelijk zou moeten zijn, blijkt dat op zo'n school het niveau hoger kan liggen.
Aan het eind van het gimnazjum worden twee toetsen van elk twee uur afgenomen. Eén (geïntegreerde) toets met de talen en geschiedenis en één toets met de exacte vakken en aardrijkskunde.
Na deze toetsen stromen de leerlingen door naar het lyceum (liceum ogólnoksztalcące of liceum profilowane, beide bereiden voor op de universiteit), technisch middelbaar onderwijs (liceum techniczne) of beroepsgericht onderwijs (szkola zasadnicza).

Tussen de verschillende lycea is zeker sprake van enige competitie: van scholen is bekend hoe goed ze zijn (lees: hoe hoog het percentage toegelaten studenten tot de universiteit is). Een gevolg daarvan is dat er voor een goede school met plaats voor ca. 200 nieuwe leerlingen meer dan 1000 leerlingen worden aangemeld. Verder profileren scholen zich door extra uren in bepaalde vakken, bijvoorbeeld wiskunde, talen of sport.
Aan bijzondere prestaties wordt ceremonieel aandacht besteed: o.a. portrettengalerijen van bekroonde en/of geslaagde leerlingen.

Het nieuwe systeem is halverwege met de invoering, er zijn nog 'oude' bovenbouwklassen. Voor conclusies of het nieuwe systeem goed werkt is het dus veel te vroeg. Gevraagd naar de eerste ervaringen met de niveauverschillen kregen we verschillende reacties. Schoolleiders waren van mening dat het een goed systeem is, docenten waren wat minder enthousiast: zij lopen in de praktijk tegen de, soms zeer grote, verschillen aan. Differentiatie binnen klassenverband is er in de lessenpraktijk niet door ons waargenomen. Toen wij doorvroegen over dit probleem, gaf een lerares tenslotte als antwoord: 'We hebben de verplichting om het zo uit te voeren.'

De scholen zijn tamelijk sober ingericht. In een van de scholen werd juist een vrachtwagen vol afgedankt meubilair uit Nederland gelost: dat kan daar nog jaren mee (voor het bedrag dat hiermee wordt bespaard, kunnen computers worden aangeschaft). Het is er schoon, ook na de pauzes geen rotzooi op de grond,

FIGUUR 1 Examenopgaven (vertaald in figuur 2)

Zadanie 1
Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że miara bezwzględna kąta $ABC = 120°$ i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długość boków i pole tego równoległoboku.

Zadanie 2
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(m^2 - 1)x^2 + (1 - m^2)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1 + x_2 = x^2{}_1 + x^2{}_2$$

geen kauwgom onder de tafels te ontdekken, ... Het lijkt zo wel het onderwijswalhalla. Maar dat staat te bezien.
Een volledige weektaak bestaat uit 18 lessen aan klassen die gemiddeld even vol zitten als bij ons. Het salaris is echter vrij laag. In Polen hebben vrijwel altijd beide partners uit een gezin een betrekking buitenshuis. Maar dan nog zien veel docenten zich genoodzaakt hun schamele inkomen wat uit te breiden door het geven van lessen 's avonds en zaterdags in het volwassenenonderwijs. Als die baantjes al vergeven zijn is er nog steeds het bijlescircuit waar Poolse ouders gretig gebruik van maken om hun kinderen betere startposities te bezorgen. De concurrentie immers is enorm. Niet alleen dient toelating tot een gerenommeerde universiteit door middel van een toelatingsexamen te worden bedongen, ook voor de betere middelbare scholen is het enorm dringen.

Een directeur wordt benoemd voor een periode van vijf jaar. Hij of zij kiest zelf een adjunct. Bij onvoldoende functioneren treedt de directeur eerder af en 'sleept de adjunct mee'. Sommigen van ons zouden heel blij zijn met zo'n systeem in Nederland. (Hebben de AOb en de AVS meegelezen?)

De wiskunde

Het wiskundeonderwijs op de gymnasia is aan het vernieuwen. Er worden nieuwe boeken met werkschriften gebruikt en de onderwerpen die behandeld worden zijn vergelijkbaar met die bij ons, maar zij gaan er wel meteen diep op in. Zo wordt er bij het tekenen van hoeken al uitgebreid geconstrueerd met passer en liniaal (geen geodriehoek). Het reken-onderwijs blijft een grote rol spelen. De vaardigheden om goed te kunnen rekenen worden uitgebreid behandeld. Er wordt niet vanuit gegaan dat leerlingen een rekenmachine hebben, toch heeft een enkeling er wel een. Ook de TI-83 (die in Polen duurder is dan in Nederland) is een keer gesignaleerd, maar de eigenares wist geen gebruik te maken van de grafische mogelijkheden. Het vaktijdschrift van de Poolse wiskundeleraren bevat de laatste jaren in een kwart van de nummers een artikel over het gebruik van de GR in de klas. Over enkele jaren zal de GR wel verplicht worden op de lycea, maar de vrees bestaat dat de GR te duur is voor veel leerlingen en ouders.
Leerlingen gebruiken soms een apart aantekenschrift waarin alle definities worden opgeschreven.

De lessen

Tijdens het bezoeken van middelbare scholen en het bijwonen van enkele wiskundelessen aldaar wordt snel duidelijk dat er verschillen en overeenkomsten zijn met scholen en wiskundelessen in Nederland.
Het viel ons op dat het er overwegend ordelijk aan toegaat, zonder dat er sprake is van een gespannen sfeer. Integendeel, de omgang tussen leerlingen en docenten getuigde vaak van wederzijds respect.

Enkele reisgenoten hebben een didactisch-weloverwogen uitleg en lesopbouw meegemaakt, maar bij veel lessen gaat het er als volgt aan toe.
De les begint met een korte terugblik op de vorige les. Daarna wordt er kort verteld wat er die les gaat gebeuren. Dan leest de docent een opgave voor, een leerling maakt deze op het bord terwijl de andere leerlingen de opgave in hun schrift maken (of overschrijven van het bord). Dan wordt de volgende opgave voorgelezen, opgeschreven en op het bord gemaakt.
De schoolborden zijn vaak van een klein formaat, dus snel vol. Een leerling, daartoe voor een week aangesteld, hanteert de spons en gunt daarmee de docent en zijn medeleerlingen een korte adempauze. Deze manier van werken wordt vaak het hele lesuur volgehouden. De sfeer is uiterst vriendelijk en er valt geen onvertogen woord.
Komt er in de les iets nieuws aan de orde, dan zou je verwachten dat de docent oriënteert, sorteert, voorbeelden en non-voorbeelden aandraagt en dan pas tot expliciteren overgaat. Dat hebben we niet gezien.

FIGUUR 2 Twee examenopgaven

1 De punten A, B, C en D zijn opvolgende hoekpunten van een parallellogram.
De omtrek van het parallellogram is gelijk aan 26, $\angle ABC = 120°$, de straal van de ingeschreven cirkel van ΔBCD is gelijk aan $\sqrt{3}$.
a Bereken de lengten van de zijden van het parallellogram.
b Bereken de oppervlakte van het parallellogram.

2 Bereken alle waarden van de parameter m, waarvoor de vergelijking
$$(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+m^2-m-2=0$$
twee verschillende oplossingen x_1, x_2 heeft die voldoen aan de vergelijking $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$.

Integendeel: bij een les over limieten komen eerst de definities van linker- en rechterlimiet op het bord en daarna wordt alles met een heel abstract plaatje geïllustreerd. Dat is het dan. Natuurlijk blijkt voor slimmere leerlingen tijdens het maken van de opgaven wel waar het om gaat, maar het is toch jammer dat leerlingen op deze manier de stof toegediend krijgen. De manier lijkt wel wat op de wijze van lesgeven in Nederland van vóór 1968. Ook de behandelde stof vertoont wat overeenkomsten. Zie bijvoorbeeld de *matury* (eindexamens van het lyceum) in figuur 2 [2][3]. Grotere opgaven, zoals functieonderzoek, werden in stukjes geknipt en door verschillende leerlingen achter elkaar op het bord gemaakt.
Fouten werden vanuit de klas of door de docent verbeterd en het grotere rekenwerk werd meestal voorgezegd door enkele leerlingen met een rekenmachine.

Lesvoorbereiding

Op één school kregen we vooraf volledig uitgeschreven lessen met leerdoelen, benodigde voorkennis en een tijdsplanning in minuten. Beide docentes gebruikten daarvoor hetzelfde model. Het bleek dat de inspectie tot enkele jaren geleden eiste dat elke les zo voorbereid moest worden. Nu is dat niet meer voor elke les verplicht, maar wel moet je dat nog enkele malen per jaar doen, wil je in aanmerking komen voor een hogere docentenfunctie.

Nieuwe didactiek

Uit verhalen van aangetrouwde familieleden en kennissen hadden sommigen al voor de reis naar Poznan een beeld van het wiskundeonderwijs op de middelbare school. Dat beeld valt met enkele trefwoorden samen te vatten: saai, schools en dril. De eerste indrukken tijdens de lesbezoeken bevestigden dit beeld in hoge mate. Het beeld werd enigszins bijgesteld tijdens een bezoek aan de afdeling wiskundedidactiek van de universiteit van Poznan. De hoofddocente didactiek vertelde dat men in Polen reeds enige tijd doende is het wiskundeonderwijs in de middelbare scholen te hervormen. In Polen blijkt echter weinig geld beschikbaar te zijn om alle voorstellen ter begeleiding van de hervormingen uit te voeren. De hoofddocente zou ook graag meer uitwisseling van ervaringen tussen Nederlandse en Poolse docenten wensen om de komende hervormingen in het nieuwe curriculum te begeleiden.
De noodzaak van begeleiding werd zichtbaar nadat we met een docente een door één van ons gegeven les bespraken. De les ging over kansrekening, had een open vraagstelling en de leerlingen zaten in groepen van vier bij elkaar om het gestelde probleem aan te pakken. De les verliep naar onze mening verre van ideaal maar de eerste reactie van de lerares na de les luidde: 'Nu ik dit gezien heb, durf ik het ook wel aan, zo'n les nieuwe stijl.' Dat was misschien wel de meest kostbare reactie van de hele reis. Immers de meesten van ons weten uit eigen ervaring dat het veel moeite kost de vertrouwde overgeleverde vormen van onderwijs los te laten en in het diepe te springen met nieuwe inhouden en methoden.
De onvolprezen nestor van onze groep, Hans van Lint, duwde een Pools sprekende Nederlandse collega tijdens de reis een bundeltje wiskundedidactiek-tijdschriften in de hand, met het verzoek de artikelen eens te lezen en er verslag over uit te brengen. De bladen bleken de naam 'Nauczyciele i Matematyka' (Leraren en Wiskunde) te dragen en zijn het orgaan van de vereniging van Poolse wiskundeleraren. Ze bevatten vooral artikelen die met de lespraktijk te maken hebben zoals lesverslagen, experimenten met 'bijzondere' lichamen, voorbeelden van het gebruik van de TI-83 in de les, etc. Verrassend is dat onze 'eigen' didactiekdocent Harrie Broekman vaak werd aangehaald. Hij heeft al enkele jaren contacten met de Poolse vereniging van wiskundeleraren, geeft regelmatig lezingen in Polen en nodigt Poolse leraren voor bezoeken in Nederland uit. Een beetje overdreven misschien, maar toch leek het erop alsof Harrie Broekman voor de Poolse leraren een soort Mozes-rol vervult: hij wijst wegen aan om uit het diensthuis van onbruikbare wiskunde te geraken. Maar in Polen ontbreekt vooralsnog geld bij de regering en zelfvertrouwen bij docenten om achter Harrie Broekman en anderen aan te trekken.

Het curriculum wordt, net zoals voorheen, door het ministerie vastgesteld. Vanuit de universitaire lerarenopleidingen wordt getracht hier invloed op uit te oefenen. Dit verloopt vooralsnog moeizaam, men staat aan het begin van een cultuuromslag, zo die al gemaakt wordt.
Maar de wiskunde in toepassingen, die wij tijdens onze lessen lieten zien, werd niet herkend als wiskunde. Dat leverde meteen de vraag op: wat wil je met je wiskundeonderwijs op de middelbare school bereiken? Tijdens de bijeenkomst op de universiteit gaf dat aanleiding tot een levendige discussie.
In Polen fungeert de schoolwiskunde onmiskenbaar als een van de selectiemiddelen. Die wiskunde is gestoeld op zuivere wiskunde, zonder (al dan niet met de haren er bij gesleepte) toepassingen.
In Nederland hebben wij met de invoering van wiskunde A en B, de programma's voor 12-16, de basisvorming en de Tweede Fase, duidelijk een andere weg ingeslagen.
De gedachte kan gemakkelijk postvatten, dat wij in het denken over en het ontwikkelen van modern wiskundeonderwijs een grote voorsprong hebben opgebouwd.
Vanuit het oogpunt *wiskunde voor allen* hebben we in Nederland inderdaad aardige resultaten weten te boeken, internationale onderzoeken lijken dat te bevestigen. Het programma voor de onderbouw doet zeker veel meer recht aan de vele leerlingen voor wie *'echte'* wiskunde niet is weggelegd. De conclusie dat we daarmee een eind op de goede weg zijn is daarmee zeker gerechtvaardigd.
De keerzijde van deze medaille is ons in Polen voorgehouden: waar in Nederland de studenten voor

een wiskundestudie aan de universiteit zeer mondjesmaat (soms één voor één) worden binnengehaald, daar staan ze in Polen in de rij. Alleen al in Poznan waren voor de faculteit Wiskunde en Informatica 1400 aanmeldingen voor 250 plaatsen. Wij hebben in onze kennismaatschappij dringend behoefte aan exact geschoolde mensen. Is onze schoolwiskunde dan niet boeiend, uitdagend en uitnodigend genoeg om als vervolgstudie te kiezen? De laatste ontwikkelingen doen vrezen dat het enige programma dat die uitdagingen wel in zich heeft, wiskunde B12 in het profiel N&T, het loodje moet leggen. Op welke weg zijn we dan?
Kortom, veel stof tot discussie, nadenken en zeker tot inspiratie. Na terugkeer in de dagelijkse lespraktijk sprak één der deelnemers: ‘Het is net alsof ik nieuwe energie gekregen heb, ik weet weer waar ik het allemaal voor doe!’ Een betere doelstelling en een mooiere afsluiting van zo’n week kun je je niet voorstellen.









FOTO 1
De ontvangst op de scholen was allerhartelijkst, in ieder geval met koffie en veel koekjes, soms met een compleet ontbijt

FOTO 2
Het bord wordt regelmatig 'schoongeveegd' waarna er weer een uitwerking op komt

FOTO 3
Op sommige scholen gaan de leerlingen aan het begin van de les staan om de docent te groeten

FOTO 4
Poznan heeft een mooi centrum

FOTO 5
Er werd enthousiast meegewerkt aan de 'Nederlandse lessen'

Noten

[1] De reis werd als Plato-project gefinancierd door de Europese Unie en stond onder inspirerende leiding van Hans van Lint en Jeanne Breeman. In Polen was de hulp van Barbara Mika-Bialecka, een in Polen geboren en getogen, maar sinds 15 jaren in Nederland werkende wiskundelerares, onmisbaar bij het over en weer vertalen van Poolse en Nederlandse teksten.
Voor nadere informatie: Euroschool, Govert Werther (tel. 072-5118502; e-mail: werther@europeesplatform.nl) of zie het artikel in Euclides jrg. 77, p.25.
[2] De matury vormen voor de verschillende examenvakken per onderwijsdistrict een soort centraal examen van het lyceum. De opgaven zijn voor alle middelbare scholen uit een regio dezelfde en een commissie van deskundigen van buiten de school beslist met de schooldocenten over de becijfering. Het behalen van een voldoende resultaat voor de matury geeft echter geen toelatingsrecht tot verdere studies. Vaak eisen faculteiten, vooral die in de veel gewilde studies, nog een voldoende resultaat voor een toelatingsexamen. Bij wiskunde ligt de lat voor de gevestigde faculteiten in Warschau, Krakau, Wroclaw en Poznan erg hoog: er wordt een grote dosis inventiviteit vereist om te worden toegelaten tot academische studies.
[3] Wie wil kennisnemen van dit examen kan terecht op http://www2.gazeta.pl/edukacja/1,27123,269357.html
De tekst van dit examen is in het Pools; de Nederlandse vertaling is te vinden op
http://members.home.nl/hrenck/vertexamen.htm
Het is interessant deze opgaven te vergelijken met proefopgaven voor de matury nieuwe stijl die voor het eerst landelijk in 2003 worden afgenomen:
http://www2.gazeta.pl/im/817/m817099.pdf
De vertaling van deze opgaven is te vinden onder:
http://members.home.nl/hrenck/vertexnieuw.htm

Over de auteurs

Irene Dalm-Hof (e-mail: idalm@ibiza-mail.com) is lerares wiskunde aan het Wellantcollege vmbo/mavo Stek te Dordrecht.
Gerrit de Jong (e-mail: gdejong@zeelandnet.nl) is leraar wiskunde aan de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren te Middelburg en auteur bij Getal en Ruimte.
Pieter Peeters (e-mail: phw.peeters@planet.nl) is leraar wiskunde aan het Berlage Lyceum (Esprit scholengroep) te Amsterdam.
Harrie Renckens (e-mail: hrenck@home.nl) is leraar wiskunde aan het Grotius College te Heerlen.
Heiner Wind (e-mail: hwind@home.nl) is leraar wiskunde aan het Wessel Gansfort College te Groningen.

Boekbespreking / De vierde dimensie Auteur: Thomas F. Banchoff

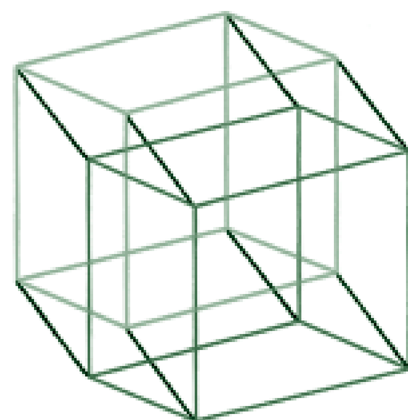
Uitgever: Natuur en Techniek Amsterdam ISBN 90 76988 013 Prijs: € 37,50

[Chris van der Heijden]



Wij leven in de driedimensionale ruimte. Kunnen wij ons een ruimte voorstellen van een hogere dimensie? Op deze vraag geeft Thomas F. Banchoff een helder en boeiend antwoord in zijn boek met de Nederlandse titel 'De Vierde Dimensie, Wiskunde in hogere sferen'. Dit is de vertaling van 'Beyond The Third Dimension, Geometry, Computergraphics, and Higher Dimensions'. De Engelse titel dekt de inhoud veel beter omdat de schrijver zich niet uitsluitend beperkt tot de vierde dimensie maar ook hogere dimensies en gebroken dimensies van fractalen bespreekt. Bij de wel erg vrij vertaalde ondertitel 'Wiskunde in hogere sferen' zou het vermoeden kunnen rijzen dat we hier te maken hebben met een gepopulariseerde versie van de wiskunde waarin met bloemrijke taal het gebrek aan inhoud verbloemd wordt. Het boek heeft echter veel te bieden voor de leek met enige voorkennis van figuren en lichamen in de tweede en derde dimensie, en ook voor wiskundig geschoolden valt er vooral veel te leren uit de benaderingswijze van de schrijver. Of zoals de schrijver zelf zegt (p.157):
'*Feiten over meetkunde worden vertaald in algebraïsche feiten en omgekeerd. De wiskunde die zich met deze transformaties bezighoudt heet lineaire algebra. Helaas heeft deze praktische manier van omgaan met de wiskunde van dimensies ook ertoe geleid dat veel fraaie resultaten onbereikbaar zijn voor de leek. In dit boek heb ik doelbewust de meetkunde behandeld vanuit het synthetische gezichtspunt.*'
Voor dit principiële standpunt valt ook in didactisch opzicht veel te zeggen. Een algebraïsche benadering van de meetkunde kan na veel gereken tot goede antwoorden leiden zonder dat dit bijdraagt tot werkelijk inzicht in de meetkunde. Wie heeft niet deze ervaring bij zichzelf of bij zijn of haar leerlingen? Begin daar dus niet mee, maar stel dit uit tot een later stadium. De coördinatenmeetkunde wordt in dit boek misschien daarom pas aan het einde besproken.
De schrijver kiest voor de dimensionale analogie en verwijst daarbij naar het beroemde boekje *Flatland* van Edwin Abbott uit 1884. Om deze aanpak te illustreren volgen hier een paar voorbeelden[1].
Een kubus in de 0-dimensionale ruimte is slechts een punt. Bewegen we dit punt in 'lijnland' over een afstand van één eenheid, dan krijgen we een lijnstuk. Een verschuiving in 'platland' van dit lijnstuk in een richting loodrecht op zichzelf van één eenheid levert een vierkant op. Zo doorgaand krijgen we in 'ruimteland' een kubus en in de vierdimensionale ruimte een hyperkubus met $8 + 8 = 16$ hoekpunten, $12 + 12 + 8 = 32$ ribben, $6 + 6 + 12 = 24$ vierkante vlakken en $1 + 1 + 6 = 8$ 'grenskubussen'.
Bekend is dat er slechts vijf platonische lichamen zijn. We kunnen dit aantonen door ervan uit te gaan dat de hoeken van drie of meer regelmatige veelhoeken die in een hoekpunt bij elkaar komen, samen kleiner dan 360° moeten zijn. Van deze vijf regelmatige veelvlakken zijn kubus en achtvlak elkaars duale, zo ook twaalfvlak en twintigvlak, terwijl het viervlak zelfduaal is. Vertalen we naar analogie punt in lijn en regelmatige veelhoek in regelmatig veelvlak en kijken we hoeveel regelmatige veelvlakken met een gemeenschappelijke ribbe rondom een lijn passen waarbij nog ruimte overblijft om ze samen te vouwen in de vierde dimensie, dan krijgen we de regelmatige

FIGUUR 1 Een hyperkubus



Moving a cube perpendicular to itself creates a hypercube

polytopen in de vierde dimensie, terwijl we voor de verdere ontwikkeling ook weer gebruik kunnen maken van het begrip dualiteit.

Om ons een beeld te vormen hoe een lichaam in de vierde dimensie eruit ziet, bespreekt de schrijver vier methoden: doorsneden, schaduwbeelden (parallel-projectie), perspectief (centrale projectie) en uitslag-patronen. De bespreking hiervan wordt verlevendigd met aansprekende praktische voorbeelden, zoals MRI-beelden van het menselijk hoofd, de allegorie van de grot van Plato, het schilderij Corpus Hypercubicus van Salvador Dali, Schlegeldiagrammen en de stereografische projectie. Computergrafica biedt de mogelijkheid om deze projecties zichtbaar te maken en ze vanuit verschillend standpunt te bekijken. Het boek geeft hiervan fraaie voorbeelden. Vroeger werden projecties van vierdimensionale lichamen in de driedimensionale ruimte voorgesteld door sculpturen en stangenmechanismen. Ook hiervan zijn in het boek foto's opgenomen.
De schrijver beperkt zich echter niet tot de pure meetkunde, maar laat zien dat de aldus verkregen kennis samen met computertechnologie toepasbaar is bij praktische problemen, bijvoorbeeld bij data-visualisatie. Men krijgt beter inzicht in functionele relaties met meer dan drie variabelen door voor de interpretatie van de grafieken de dimensie op slimme wijze te verlagen.

De kracht van dit boek ligt in de eerste 6 hoofdstukken. De hoofdstukken erna over configuratie-ruimten en niet–euclidische meetkunde en niet-oriënteerbare oppervlakken zijn interessant maar lijken toch wat moeilijk voor een leek. Dit neemt niet weg dat dit juist de aanleiding kan zijn om verder te studeren. Aan het einde van het boek worden daartoe 36 literatuurverwijzingen gegeven.

Het boek ziet er aantrekkelijk uit met mooie en duidelijke illustraties. In de tekst komen enkele foutjes voor die echter niet hinderlijk zijn omdat de lezer uit de context kan begrijpen hoe het werkelijk zit. Storender is echter dat op blz. 79 en blz. 80 hetzelfde plaatje met verschillend onderschrift voorkomt. Wijst dit op onzorgvuldigheid bij de samenstelling van de Nederlandse editie?

Samenvattend kunnen we zeggen dat dit boek veel te bieden heeft, zeker ook voor geïnteresseerde leerlingen in het voortgezet onderwijs met meetkunde in hun pakket. Friedrich Fröbel (1782-1852) vond het al belangrijk om jonge kinderen meetkundige stimuli aan te bieden, zoals de auteur vermeldt. Dit boek krijgt daarom op de achterflap terecht een warme aanbeveling van de bekende meetkundige H.S.M. Coxeter.

Noot

[1] De illustraties zijn om technische redenen overgenomen uit de Amerikaanse editie (red.).

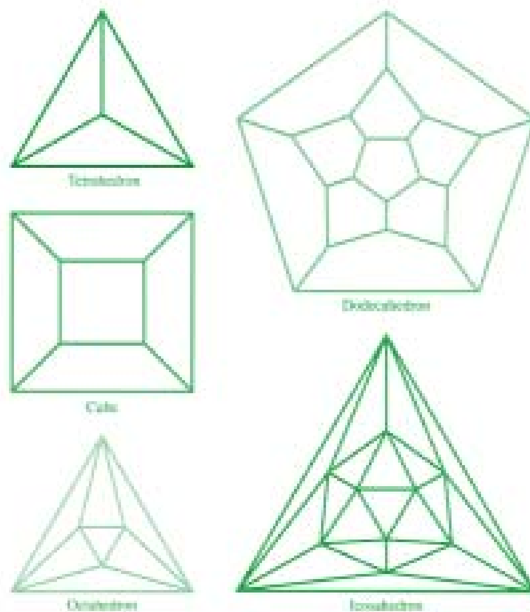
Over de auteur van deze bespreking

Chris van der Heijden (e-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl) begon in 1960 zijn loopbaan als werktuigbouwkundige in het bedrijfsleven. Van 1969 tot 2001 was hij wiskundedocent aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse. De laatste 27 jaar was hij lid van de schoolleiding.

FIGUUR 2 De tabel op pag. 77 van het boek

	Dimension of n-cube				
	0	1	2	3	4
Number of 0-cubes	1	2	4	8	16
Number of 1-cubes	0	1	4	12	32
Number of 2-cubes	0	0	1	6	24
Number of 3-cubes	0	0	0	1	8
Number of 4-cubes	0	0	0	0	1
Sum of k-cubes	1	3	9	27	81

FIGUUR 3 De 5 Schlegeldiagrammen op pag. 117



EERSTE REEHORSTCONFERENTIE WISKUNDE

Een kort verslag

[Elzeline de Lange]

De Eerste Reehorstconferentie Wiskunde van 9 januari jl. was vooral bedoeld voor docenten wiskunde in de basisvorming, het vmbo en de onderbouw havo/vwo. Ruim 230 deelnemers voor deze eerste keer is een mooi begin. De sfeer en de verzorging was prima.
Het aanbod uit lezingen en/of workshops was groot en zeer divers : 6 lezingen en wel 17 workshops.

Omdat ik helaas niet de hele dag aanwezig kon zijn, heb ik maar twee workshops gevolgd:
1. *Powerpoint*. Deze workshop werd verzorgd door Bep van de Heuvel. Hij deed dit zeer inspirerend en informatief. Met behulp van een duidelijke handleiding konden we direct aan het werk.
Powerpoint kun je als ondersteuning gebruiken in de wiskundeles. In zo'n presentatie kan een onderwerp uitgelegd worden, maar er kan ook verwezen worden naar internet-wiskundesites waar de leerlingen nog veel meer informatie over zo'n onderwerp kunnen vinden.
Dit was een prima manier om genoeg inzicht te krijgen om enthousiast te raken; hier kan ik voor en met mijn leerlingen mee aan het werk.
2. De andere workshop ging over *Praktisch werken in het vmbo, van GWA tot eindexamen*.
Marijke Kok uit Zoetermeer schetste een werk/leerlijn van praktische opdrachten: van kleine praktische opdracht en GWA uit het methodeboek in het 1^e jaar, via sectororiënterend praktijkonderzoek in het 2^e jaar, tot grote schoolopdrachten in het 3^e en 4^e leerjaar. Zij illustreerde haar verhaal met verschillende praktijkopdrachten.
De workshop was vooral gericht op de lwoo-leerlingen. Een leuk verhaal, voorzien van praktijk-illustraties.

De keuze van onderwerpen was zo groot en aantrekkelijk dat ik graag meer had willen volgen, bijvoorbeeld:
- Wiskunde en IKEA,
- Grote Praktische Opdracht voor BB- en KB-leerlingen,
- Vliegers als praktische opdracht in 3 vmbo.

Deze onderwerpen geven aan dat de organisatoren inderdaad zeer leerling- en praktijkgericht aan het werk zijn geweest.

Tijdens de lunch hoorde ik andere zeer enthousiaste reacties op workshops en lezingen.
Al met al een prettige en goed geslaagde conferentie.
Op naar nummer twee!

Over de auteur

Elzeline de Lange (e-mailadres: edelange@tref.nl) is wiskundedocent op Effatha (een school voor dove en slechthorende kinderen), afdeling vmbo, te Zoetermeer. Zij is tevens vmbo-redacteur van Euclides.

Aankondiging / Nederlands Mathematisch Congres 2003

[Mascha Honsbeek]



Op donderdag 1 en vrijdag 2 mei 2003 zal aan de Katholieke Universiteit Nijmegen het jaarlijks Nederlands Mathematisch Congres plaatsvinden. De openingsvoordracht wordt verzorgd door R. Hartshorne, de slot-voordracht door R. Dijkgraaf. Daarnaast omvat het wetenschappelijk programma voordrachten door F. Beukers, B. Jacobs, J. Koenderink en K. Landsman, en is er een dertiental minisymposia.

Het NMC2003 is een bijzonder congres, want het organiserende Wiskundig Genootschap bestaat 225 jaar. Op donderdagmiddag vieren we dit met een speciaal programma:
15.45 - 16.15
Lustrumvoordracht door Nobelprijswinnaar M. Veltman,
16.15 - 18.00
Symposium 'Wiskunde, nodig en in nood', over de slechte situatie van de wiskunde in Nederland, met sprekers H. Brandt Corstius, P. Nijkamp en J. Veldhuis.

Verder stelt het bestuur van het Genootschap een prijs van 225 euro ter beschikking voor het meest originele en geïnspireerde antwoord op de vraag:

Formuleer een wiskundig probleem met uitkomst 225.

Inzendingen moeten uiterlijk 1 april 2003 binnen zijn op *souvi@math.kun.nl* of bij Prijsvraagcommissie NMC2003, t.a.v. dr. B. Souvignier, subfaculteit wiskunde KUN, Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen.

Meer informatie over het programma en de mogelijkheid tot inschrijven vindt u op de website *www.math.kun.nl/nmc2003*

Aankondiging / Conferentie 'ICT bij wiskunde in de les en erbuiten'

ICT2003 is de derde landelijke conferentie over ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs, waarbij wiskundedocenten zich kunnen verdiepen in recente ontwikkelingen op dit gebied. Op deze conferentie, die wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut en APS-wiskunde, staat het gebruik van ICT binnen maar ook buiten de wiskundeles centraal:
- voorbeelden uit de klassenpraktijk van basisvorming, vmbo en tweede fase;
- ICT-gebruik van leerlingen thuis;
- mogelijkheden voor de wiskundesectie;
- overzicht van nieuwe ontwikkelingen.

In parallelpresentaties worden ervaringen met ICT-gebruik in de klas gepresenteerd. In hands-on workshops kunt u zelf ondervinden welke mogelijkheden software biedt. In de keuzewerkgroepen komen onder andere de volgende onderwerpen aan bod:
- Excel benutten voor de wiskundeles;
- wiskundesoftware voor taalzwakke leerlingen;
- applets aanpassen en veranderen.

Daarnaast is er een 'webstrite', waarin de beste website van een wiskundesectie wordt gekozen door een deskundige jury. Met mooie prijzen!

ICT2003 vindt plaats op donderdag 24 april 2003 van 9.30 tot 16.15 uur te Utrecht.

Meer informatie over deze conferentie kunt u vinden op *www.fi.uu.nl/ict/2003*
Voor inlichtingen en inschrijving: Yolanda Velo, APS-wiskunde, telefoon: 030-2856722

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws
Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Met verbijstering heeft het bestuur van de NVvW kennis genomen van de voorgestelde maatregelen om de tweede fase meer ruimte te geven door fors te snijden in de exacte vakken. Dit resultaat is nieuw voor ons, al hadden we wel wat geruchten gehoord, maar in de besluitvorming zijn wij niet betrokken geweest. De aanbiedingsbrief van de minister suggereert het tegendeel. Dat is wel te begrijpen: als je een vak om zeep wilt brengen, gaat dat makkelijker als je direct betrokkenen daarbuiten laat. En het staat aardiger als je een plan presenteert na overleg met betrokkenen.

Hoe was het ook alweer?

Na vele jaren praten (de eerste nota, 'Profiel', is uit 1991) is de Tweede fase ingevoerd. Een van de doelen was het verbeteren van de aansluiting op de vervolgopleidingen. Daartoe is veel overleg gevoerd met alle betrokkenen. Een van de uitkomsten was dat wiskunde verplicht werd in alle profielen, vanwege het grote belang dat men eraan hechtte, ook voor mensen die later niet in een technische of exacte richting verder zouden gaan. Daarnaast gaf die verplichte wiskunde ook zwaarte aan een profiel, want men wilde afrekenen met het pretpakket. Niemand dacht dat wiskunde voor alle leerlingen makkelijk zou zijn. 'Makkelijk' was niet een argument, toen niet.
De NVvW heeft steeds op het standpunt gestaan dat je de zegeningen van de wiskunde niet iedereen door de strot moet persen, en derhalve mensen zonder talent of belangstelling ook de mogelijkheid moest geven om wiskunde niet tot en met het examen te volgen. Vandaar dat we zowel voor havo als vwo ervoor hebben gepleit om wiskunde in het C&M-profiel bescheiden te houden en af te sluiten in het voor-examenjaar met een schoolexamen. Dat is voor havo wel, voor vwo niet gerealiseerd, dit laatste als gevolg van druk vanuit de universiteiten.

De studielast voor wiskunde was per profiel anders, hoger naarmate het vak belangrijker werd geacht voor het profiel. In de breed samengestelde vakontwikkelgroep (twee docenten namens de NVvW, een vertegenwoordiger van het wo, een van het hbo, een ontwikkelaar vanuit het FI, en een aantal mensen vanwege specifieke deelgebieden: voor de emancipatie, voor de techniek en voor de ict, de secretaris kwam van het CITO, de voorzitter was rector en wiskundige) is daarna gepoogd de programma's zoveel mogelijk toe te snijden op het gekozen profiel. Dit ter meerdere glorie van de doorstroming naar een vervolgstudie. Het voortgezet onderwijs is nog maar voor weinigen eindonderwijs, dus is aandacht voor die doorstroomfunctie van eminent belang.
De plannen van de vakontwikkelgroep zijn daarna breed besproken; de NVvW heeft naast de algemene raadpleging een eigen raadplegingsronde opgezet met de leden. Op basis daarvan is een reactie opgesteld met als gevolg nog enige aanpassingen in het programma.
Het is dus niet zo vreemd dat uit de diverse 'monitoringen' niet blijkt dat de wiskundedocenten ontevreden zijn over het programma. Er is wel kritiek op de lawine van soms onbegrijpelijke wijzigingsmaatregelen zoals het laten vallen van de gonio in havo-B.
Wel is men vaak zeer ontevreden over het relatief geringe aantal contacturen dat men krijgt om de leerling te begeleiden bij het onder de knie krijgen van de stof. Directies negeren massaal hun jarenlange kennis en ervaring over het onderwijs in de verschillende vakken en bekeren zich tot één formule voor alles. Een steen der wijzen, die het nieuwe concept van studielast per leerling met de zakjapanner weer handzaam omzet in het vertrouwde model van de les per leraar (de eerste vernieuwing die is mislukt).

Iedereen weet dat het bij wiskunde vaak anders ligt dan bij andere vakken, misschien nu wel meer dan vroeger. Bij een wiskundeprogramma dat zeer algoritmisch is, kun je door veel zelf oefenen van standaardmethoden een heel eind komen. Het oude havo-programma (van vóór HAWEX) was daar een goed voorbeeld van. Veel standaardsommen, met standaardtechnieken op te lossen. Leerlingen leerden desnoods sommen uit hun hoofd en hadden daar nog wat aan ook.

De ambities bij de nieuwe programma's reiken verder. De nadruk ligt meer op probleem-oplossen, analyseren, abstraheren, modelleren, en minder op algoritmiek. Belangrijke vaardigheden (in het dagelijks leven komt er immers zelden een kant en klare vergelijking op u af met de vraag 'los mij op in twee decimalen'), maar niet a priori makkelijker te leren. Dat blijkt ook; leerlingen vinden het moeilijk. En dan is er ook nog de gebrekkige beheersing van algebraïsche vaardigheden. Maar als men het van belang vindt dat alle leerlingen een goede basis in de wiskunde hebben, moet je als reactie daarop eerder het onderwijs intensiveren bij gelijkblijvende studielast, dan zoals nu voorgesteld sterk reduceren.

Aansluiting komt van twee kanten

De vernieuwde procedure - al dat overleg - legde ook een verantwoor-

delijkheid bij het vervolgonderwijs om die aansluiting te waarborgen. Inmiddels zijn er op veel plaatsen aansluitingsprojecten aan de gang, al loopt nog niet alles vlekkeloos.
In deze situatie, waarbij de eerste lichting vwo'ers nu de universiteiten bevolkt, getuigt het niet van doordacht beleid om alles maar weer op de schop te nemen zoals de nota voorstelt. Overlading en versnippering worden geconstateerd, maar oorzaken niet benoemd. Het is dus de vraag of de problemen door deze maatregelen worden opgelost, of juist nieuwe worden opgeroepen. Op sommige scholen is de uren-discussie weer flink losgebarsten. Met dank aan de minister. Deze energie had niet beter besteed kunnen worden...

Er worden zonder onderbouwing nieuwe geloofsartikelen geformuleerd: drie vakken per profiel en alle vakken even groot. Dat laatste is een echte vernieuwing, vroeger waren vakken gelijkwaardig maar niet even groot in uren. Wiskunde wordt dus fors kleiner in de bèta-profielen, waar men het in de oorspronkelijke - aanmerkelijk meer doordachte - plannen juist groot had gemaakt, en groter in de alfa-profielen waar men het juist niet zo groot had gemaakt (en ook daar was over nagedacht). Dat is precies het verschil tussen een voorstel gebaseerd op een onderwijsvisie en een boekhoudkundig rekenmodel, met overigens wel een onderscheid van wel 40 uur in drie jaar tussen een groot en een standaardvak.
De prijs voor de meest absurde consequentie gaat zonder twijfel naar LO2, de theorievariant van lichamelijke opvoeding op vwo-niveau: niet belangrijk voor de doorstroming, maar 160 uur erbij. Vooralsnog zonder programma, maar in de hoop dat dat wel op niveau ingevuld kan worden. Je zou er cynisch van worden.

De argumentatie in de nota is verder vrij willekeurig: deelvakken worden afgeschaft, maar bij wis- en natuurkunde wordt juist het heelvak afgeschaft en het deelvak gereduceerd en tot heelvak verheven. Van Latijn en Grieks wordt geconstateerd dat de leerdoelen niet gehaald worden; het vak wordt daarom uitgebreid tot 600 uur. Een zelfde constatering bij wiskunde is reden om maar flink te snoeien.

In tegenstelling tot wat men beweert, wordt de profielstructuur de facto losgelaten en vervangen door een systeem met veel keuzevakken, meer richting de oude situatie. Gezien de rooosterproblemen en de bekostiging zal het vaak de school zijn die kiest, en niet de leerling.

De drie profielvakken zijn nog maar goed voor een kleine 30% van het totaal, dus bij 30 lessen per week zijn 9 lessen in de drie profielvakken, 21 lessen algemeen of keuze. Per profielvak zo'n 3 uur. In welk ander land denkt men dat 3 uur wiskunde per week een goede voorbereiding is op een exacte studie? Die forse reductie in de wiskunde en de profielen leidt tot een volstrekt nieuwe situatie. Binnen de bèta-profielen van de huidige omvang met vier vakken zijn er momenteel ontwikkelingen en mogelijkheden om te komen tot meer samenhangend onderwijs, met programma-aanpassingen wellicht. In een losse structuur met maar drie zekere vakken (zonder natuurkunde in N&G) wordt dat moeilijk, zo niet onmogelijk. Is dat vooruitgang? De opmerking dat de school natuurkunde in N&G verplicht kan stellen, is mooi maar loos, want wat heeft de vervolgopleiding aan het beleid van een enkele school?

Als compensatie stelt men een nieuw vak voortgezette wiskunde voor, overigens alleen voor het vwo. Waarom men bij de havo-leerling geen belangstelling voor bètavakken veronderstelt, is niet duidelijk. En een verruiming van de mogelijkheid om dubbel te kiezen, dus wiskunde A en B samen. Zo kan een leerling zelfs heel veel wiskunde kiezen, meer dan nu. De vraag hierbij is: is dit de jackpot (de prijs is hoog maar de kans dat je hem krijgt is gering), of is dit een realiseerbare optie? Elke vrije keuze legt een claim op het rooster; elk vak dat je aanbiedt kost geld. Als de vervolgopleidingen het niet eisen - en daarover rept de nota niet - welke positieve stimuli zijn er dan om deze keuzes te realiseren, in het bijzonder op een kleine school? Er is in het voorstel geen garantie dat elke school deze optie aanbiedt, en met dooie mussen moet je maar niet al te blij zijn.

Rekenen op de basisschool

Het voorstel wiskunde niet langer verplicht te stellen voor de pabo zal leiden tot een verdere verschraling van het rekenonderwijs op de basisschool. De situatie is nu al zorgelijk, met de grote instroom van mbo'ers die na de basisvorming geen wiskunde meer hebben gehad. Ooit was er een bewindsman die dacht dat het verstandig was als degene die de leerlingen rekenen moest leren, dat zelf ook goed kon. Deze gedachte wordt nu losgelaten. Zo dom, zo ondoordacht. De rekendidactiek is de laatste jaren sterk ontwikkeld, maar de rekenkennis van de leerkracht neemt af. Dit kan gecompenseerd worden door een stevige inzet op rekenonderwijs op de pabo, maar daarover rept de nota ook niet.

Vooralsnog overheerst de kritiek; op deze wijze zal de met de mond beleden stimulering van het bèta-onderwijs niet tot stand komen.
Cynici hebben al opgemerkt dat hiermee in één keer het lerarentekort in de exacte vakken wordt opgelost.

Maar iets anders is ook mogelijk: dat volstrekt gedemotiveerde docenten het voor gezien houden. En dat is dan weer een nieuw probleem.

Brede steun

De boze reacties vanuit de bètahoek op de plannen zijn algemeen (de website van de Vereniging biedt een actueel overzicht). De NVvW laat op zoveel mogelijk plaatsen haar stem horen - heeft het bestuur ook weer wat te doen. De strategie is daarbij om zoveel mogelijk steun te vinden bij partijen buiten het onderwijs. Dat wiskundeleraren staan te juichen zal namelijk niemand verwacht hebben, dus die negatieve reactie is ingecalculeerd. Maar ook buiten het onderwijs zijn er mensen die zich zorgen maken over deze ontwikkelingen, Nederland sukkelt steeds verder achteruit, internationaal gezien. En dat gaat op termijn ten koste van onze welvaart.

Tot nu toe:
- medeondertekening van een brief van AXIS,
- interview met de NRC,
- interview met het Technisch Weekblad,
- ingezonden brieven naar kranten (die niet altijd geplaatst zijn),
- participatie in een brief van het voorzittersoverleg-wiskunde,
- participatie in een brief van de bètafederatie,
- participatie in de handtekeningenactie van het FI,
- brieven naar Tweede-Kamerleden,
- bezoek van inspraakbijeenkomsten van vakbonden,
- kritische vragen aan vertegenwoordigers van OCenW op hun ‘voorlichtingsbijeenkomst’.

Wat nu?

Maar na de boosheid en de constatering dat dit zo niet moet, komt de vraag: ‘Wat dan wèl?’ Daarover moet de komende tijd overlegd worden, liefst met zoveel mogelijk betrokkenen.
Wat we nodig hebben zijn initiatieven om het bèta-onderwijs een steuntje in de rug te geven, nieuw elan.
Wat we niet nodig hebben is een nieuw circus met strijd om uren en roosters en programma’s en weet ik wat al niet, al die dingen die we na een paar jaar inmiddels enigszins op orde hadden. Het leek alsof er tijd kwam voor inhoud en afstemming maar helaas, nu even niet.

De verdere procedure:
- Tot 10 maart is er gelegenheid om een standpunt over de voorstellen in te zenden. Tevoren kunnen vak-verenigingen nog afzonderlijk met het departement spreken.
- De dan zittende bewindspersoon formuleert een definitief voorstel en stuurt dat naar de Tweede Kamer, die er voor de zomervakantie over spreekt.
- De vermoedelijke datum van invoering ligt niet eerder dan 1 augustus 2005.
- Parallel wordt een procedure gestart om de examenprogramma’s aan te passen; hierin mogen de vakverenigingen meepraten.

Het bestuur heeft de havo/vwo-werkgroep en de hbo-werkgroep gevraagd haar te adviseren. Uiteraard kan elk lid zijn/haar standpunt kenbaar maken en een bijdrage leveren.
Het gaat om de toekomst en het plezier in ons vak.

Rectificatie

In de congresbrochure van de NVvW-studiedag in november j.l. stonden de verkeerde gegevens van LOTS Consultancy vermeld. Hieronder de juiste gegevens:

LOTS Consultancy
Hengelosestraat 705, 7521 PA Enschede
Postbus 545, 7500 AM Enschede
telefoon: 053 483 6364
fax: 053 483 6365
e-mail: *info@lots.nu*
URL: *www.lots.nu*

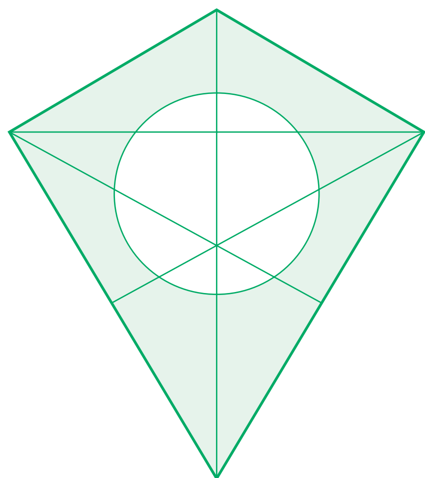
[Frits Göbel]

Puzzel 5 - Een vliegerpuzzel

In Amsterdam is er een NSO (naschoolse opvang) genaamd 'De Vlieger'. Toen daar de wenselijkheid van een relatiegeschenk ter sprake kwam, heb ik een puzzeltje gesuggereerd waarbij je van vijf vliegervormige stukjes één grotere vlieger moet maken. Deze puzzel viel niet in de smaak omdat de voorkeur uitging naar een puzzel met gelijke stukjes. Daarin kon ik toen ook voorzien (zie figuur). De cirkel staat voor het belendende KDV (kinderdagverblijf) genaamd 'De Bal'.

In het verleden is bij ontvangst van een oplossing menigmaal gebleken dat de bijlage niet op mijn computer kon worden geopend. Daarom verzoek ik de inzenders om uit de volgende mogelijkheden te kiezen:
1. gewone post, naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede;
2. als onderdeel (niet als bijlage) van een e-mailtje naar *a.gobel@wxs.nl*
In beide gevallen geldt: als u het lastig vindt om tekeningen te maken, kunt u volstaan met het noteren van de lengte van de kleinste zijde van iedere gebruikte vlieger, waarbij deze lengte voor de kleinste vlieger op 1 wordt gesteld.

FIGUUR 1



Maar ik ben met mijn eerdere ontwerpje verder gaan puzzelen, en dat leidde tot de opgave van deze aflevering.

Alle lezers weten natuurlijk welke vierhoeken 'vlieger' mogen heten, maar voor deze gelegenheid noemen we een vierhoek $ABCD$ een vlieger als $AB = BC$, $CD = DA$, $\angle A = \angle C = 90°$, $\angle B = 120°$, en dus $\angle D = 60°$.

Opgave
Bepaal zo veel mogelijk waarden van n waarvoor een vlieger kan worden verdeeld in n kleinere vliegers (die niet noodzakelijk even groot moeten zijn).

Ik moet bekennen dat mijn oplossing niet voor alle n een antwoord geeft. Ik hoop van harte dat er een of meer lezers zijn van wie het antwoord vollediger is dan het mijne.

Bijvoorbeeld: 6 maal 1 en 8 maal 1,5.
Het is misschien goed om nogmaals te vermelden dat er aan het eind van het cursusjaar een boekenbon is van € 35,00 voor de winnaar van de ladder, en dat er net zo'n boekenbon zal worden verloot onder alle inzenders!
De deadline voor inzendingen is deze keer 12 maart 2003.
Veel plezier!

Oplossing 783

Oplossing van 'Bananenschillen'

Voor beide opgaven is er een oplossing in 12 zetten.
Opgave 1: 4A 1R 2V 3LAR 1V 2VLAR 4R.
Opgave 2: 7A 6L 2V 1VR 3L 5V 1L 2L 1A 7L 2A.

Wobien Doyer gaf de oplossingen niet alleen als zettenreeksen maar ook als animaties(!), en bepaalde bovendien het aantal essentieel verschillende oplossingen van 12 zetten. Voor opgave 1 zijn het er 16, voor opgave 2 zelfs 81.

Lieke de Rooy heeft, als extra, gekeken naar oplossingen van opgave 1 op borden van $n \times n$, en kwam tot $4n - 3$ zetten ($n > 4$ en even). Maar het minimum is nog iets lager:

$$\left[\frac{10n}{3}\right] - 1,$$

een resultaat van de al eerder in deze rubriek genoemde Torsten Sillke. Hierbij is $[x]$ het grootste gehele getal dat niet groter is dan x.

Aangezien er naar het minimale aantal zetten werd gevraagd, heb ik punten afgetrokken bij oplossingen van meer dan 12 zetten (waarbij ik heel coulant ben geweest), en ook bij oplossingen die een of meer eenvoudig te corrigeren fouten bevatten (idem).

De ladderstand is nu:

L. de Rooy 60,
H. Verdonk 59,
P. Stuut 49,
T. Afman 37,
L. v.d.Brom, W. Doyer, D. Buijs, S. van Dijk en H. Linders ieder 20,
Th. Buurman 1.

Kalender
In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang.
Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
6	17 april 2003	4 maart 2003
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

donderdag 13 maart
Studiedag Wiskunde in de bb-leerweg
APS-wiskunde, Utrecht

vr. 14 maart en vr. 28 maart
Nijmeegs Colloqium Didactiek van Wiskunde
KUN, Nijmegen
Zie ook p.121 in Euclides 78-3

do. 20 maart en vr. 21 maart
Nationale Rekendagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 21 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie KUN, Nijmegen
Zie ook p.097 in Euclides 78-3

woensdag 2 april
Studiedag aansluiting reken- en wiskundeonderwijs
APS-wiskunde, Utrecht

donderdag 3 april
Mastercourse voor docenten
Kortweg-de Vries Instituut, Amsterdam

vrijdag 4 april
Nascholingsdag: de wiskunde achter Eschers "Prentenkabinet"
Mathematisch Instituut, Leiden

vr. 11 april en vr. 25 april
Nijmeegs Colloqium Didactiek van Wiskunde
KUN, Nijmegen
Zie ook p.121 in Euclides 78-3

woensdag 16 april
Studiedag Applets naar je hand zetten
Organisatie APS-wiskunde

donderdag 24 april
3e Conferentie ICT in de wiskundeles
APS, Utrecht
Zie ook p.041 in Euclides 78-1

do. 1 mei en vr. 2 mei
Nederlands Mathematisch Congres 2003
Organisatie KUN, Nijmegen
Zie ook p.161 in Euclides 78-4

zaterdag 17 mei
Symposium IX, Utrecht
Organisatie HKRWO
Zie ook p.161 in Euclides 78-4

Examens
di. 20 mei – havo B1/B12
do. 22 mei – vmbo K/TG, vwo B1/B12
vr. 23 mei – havo A12
di. 27 mei – vwo A1/A12

Regionale examenbesprekingen
do. 22 mei – havo B1/B12
ma. 26 mei – vmbo K (alleen te Utrecht, alleen voor NVvW-leden)
ma. 26 mei – vmbo TG, vwo B1/B12
di. 27 mei – havo A12
ma. 2 juni – vwo A1/A12

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html



OP WEG NAAR ZELFSTANDIG LEREN MET

PASCAL

WISKUNDE

- Pascal geeft zelfstandig leren structuur en houvast
- Werkschrift maakt eigen schrift leerling overbodig
- Werkschrift is leermiddel en naslagwerk tegelijk
- Meerdere leerroutes mogelijk
- Differentiatie duidelijk zichtbaar in informatieboeken en verschillende werkschriften
- Doorlopende leerlijn tweede fase en leerwegen